அந்தரங்கமானது

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர்தர)ப் பரீட்சை - 2018

10 - இணைந்த கணிதம் - I

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காக தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

க.பொ.த. (உ/த) பரீட்சை – 2018

10 - இணைந்த கணிதம்

புள்ளித்திட்டம்

வினாத்தாள் I :

பகுதி A : 10 X 25 = 250

பகுதி B : 05 X 150 = 750

மொத்தம் = 1000/10

வினாத்தாள் I - இறுதிப் புள்ளி = 100

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் □ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடப்பட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை ○ அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். வினாப்பத்திரம் I இற்குரிய புள்ளிப்பட்டியலில் "வினாப்பத்திரம் I" என்ற நிரலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுத வேண்டும். பகுதிப்புள்ளிகளை உள்ளடக்கி "வினாப்பத்திரம் II" எனும் நிரலில் வினாப்பத்திரம் II இற்குரிய இறுதிப்புள்ளியை பதிய வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

ooo

பகுதி A

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ என நிறுவுக.

$n=1$ ஆக, L.H.S. $= 1^3 = 1$ 5

R.H.S. $= \frac{1}{4}\cdot 1^2(1+1)^2 = 1$.

எனவே, $n=1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$n = p$ க்கு முடிவு உண்மை என்க. இங்கு $p \in \mathbb{Z}^+$

அதாவது $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4}p^2(p+1)^2$. 5

எனவே, $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ 5

$$= \frac{1}{4}p^2(p+1)^2 + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \frac{[p^2+4p+4]}{4}.$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)^2(\overline{p+1}+1)^2.$$ 5

$\therefore$ $n = p+1$ இற்கு முடிவு உண்மை. இதிலிருந்து

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின், $n = p+1$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

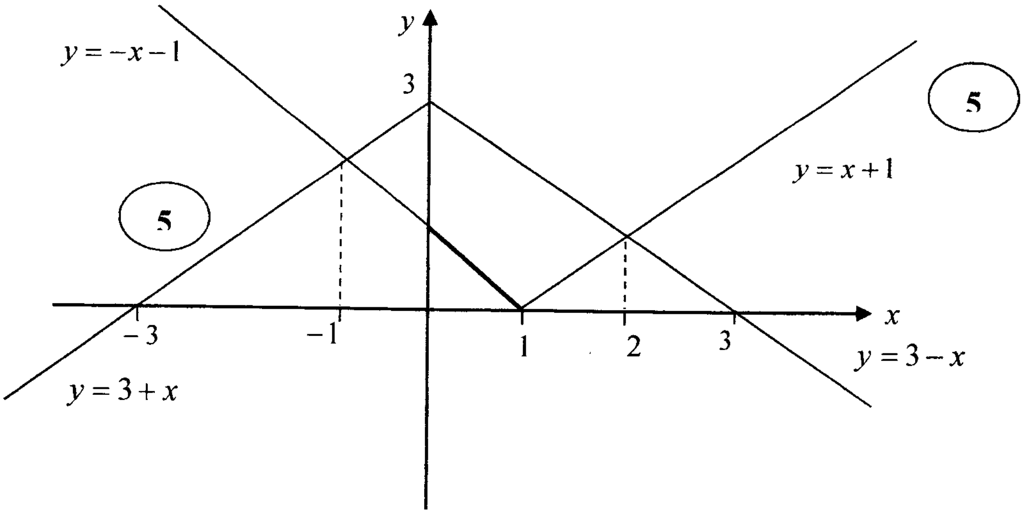
$\therefore$ **கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி** எல்லா $n \in Z^+$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

5

25

2. $y = 3-|x|$, $y = |x-1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $|x|+|x-1| \leq 3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



இடைவெட்டும் புள்ளிகளில் $-x+1 = 3+x$ அல்லது $x-1 = 3-x$

அதாவது $x=-1$ அல்லது $x=2$. 5

தரவிலிருந்து $|x|+|x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad |x-1| \leq 3-|x|$ 5

5

எனவே, வரைபிலிருந்து x திருப்தி செய்யும் பெறுமானங்களின் தீர்வுகள் $-1 \leq x \leq 2$.

25

வேறுமுறை 1

$|x|+|x-1| \leq 3$

வகை (i) $x \leq 0 : |x|+|x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow \; -x-(x-1) \leq 3$ 5

$\Leftrightarrow \; -2x+1 \leq 3$

$\Leftrightarrow \; x \geq -1$

இவ் வகையில், தீர்வுகள் $-1 \leq x \leq 0$

வகை (ii) $0 < x \leq 1$,

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow x - x + 1 \leq 3$ 5

$\Leftrightarrow 1 \leq 3$

இவ் வகையில், தீர்வுகள் $0 < x \leq 1$.

வகை (iii) $1 < x$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x + x - 1 \leq 3$

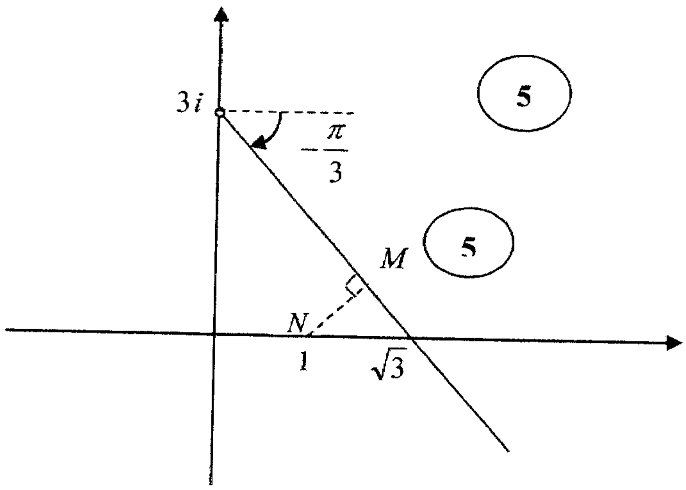
$\Leftrightarrow 2x \leq 4$

$\Leftrightarrow x \leq 2$

$\therefore$ இவ் வகையில்,தீர்வுகள் $1 < x \leq 2$.

இதிலிருந்து x திருப்தி செய்யும் பெறுமானங்களின் தீர்வுகள் $-1 \leq x \leq 2$. 5

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\mathrm{Arg}(z-3i)=-\frac{\pi}{3}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு $|z-1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.



தரவிலிருந்து

$$Arg(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ Arg(\overline{\bar{z}+3i})=-\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ Arg(z-3i)=-\frac{\pi}{3}.$$ 5

5

இதிலிருந்து $Arg(z-3i)=-\frac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு $|z-1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் NM ஆல் கொடுக்கப்படும்

இங்கு $NM=(\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{(3-\sqrt{3})}{2}.$

5

25

4. $\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8$ இன் ஈருறுப்பு விரியின் x, x^4 ஆகியவற்றின் குணகங்கள் சமமாகும். மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8 = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (x^2)^r \left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r} \quad 5$$

$$= \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (3k)^{8-r} x^{3r-8}$$

$$x^1 : 3r - 8 = 1 \Leftrightarrow r = 3. \quad 5$$

$$x^4 : 3r - 8 = 4 \Leftrightarrow r = 4.$$

தரவின்படி: ${}^8C_3 (3k)^5 = {}^8C_4 (3k)^4$ 5

$$\frac{8!}{3!\,5!} 3^5 k = \frac{8!}{4!\,4!} 3^4 \quad 5$$

$$k = \frac{5}{12}. \quad 5$$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{x+1}$$

5

$$= 2\cdot 1\cdot \frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{1}{1} \quad 5 + 5$$

$$= \frac{\pi^2}{32}. \quad 5$$

25

வேறுமுறை

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} \cdot \frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)} \quad 5$$

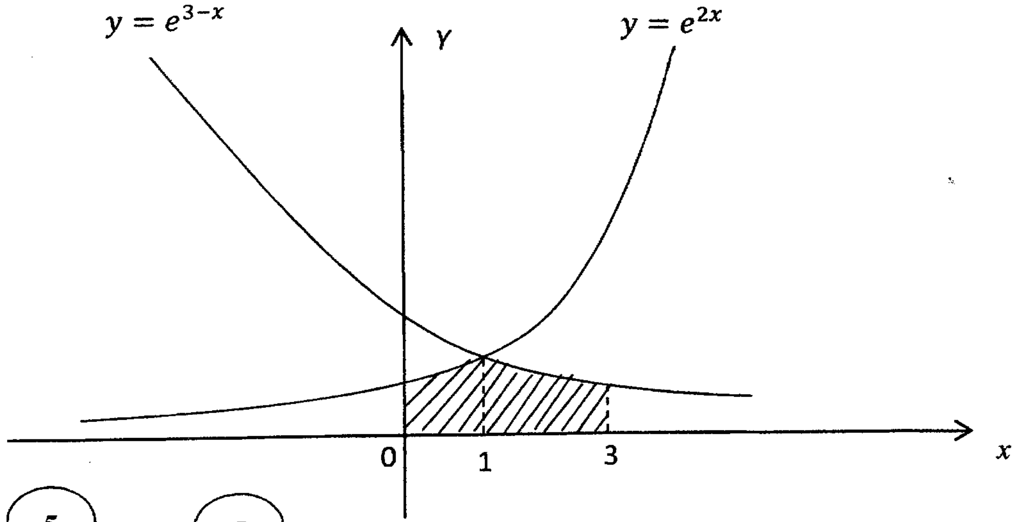
$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

5

$$= 1\cdot \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} \quad 5 + 5$$

$$= \frac{\pi^2}{32}. \quad 5$$

6. $y = e^{2x}$, $y = e^{3-x}$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{3}{2}(e^2 - 1)$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.



5 5

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^3 e^{3-x}\,dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{e^{3-x}}{(-1)}\right|_1^3$$ 5

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1) + e^2$$ 5

$$= \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(e^2 - 1).$$ 5

25

7. $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ இற்கு $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$, $y = \sin t$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி C தரப்படுகின்றது.

$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ எனக் காட்டுக.

$t = \frac{2\pi}{3}$ ஐ ஒத்த புள்ளியில் வளையி C இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிக் கோட்டின் படித்திறன் $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ என உய்த்தறிக.

$$x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \qquad y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2} \quad 5 \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t \quad 5$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} \quad 5$$

$$= \frac{1}{\sin t}$$

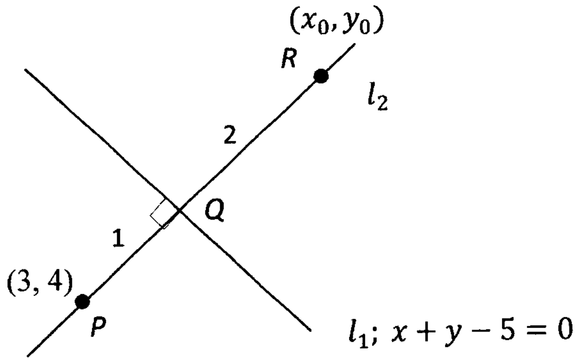
எனவே $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos t \sin t$ 5

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5

25

8. l_1 ஆனது நேர்கோடு $x + y - 5 = 0$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி $P \equiv (3, 4)$ இனூடாகச் செல்வதும் l_1 இற்குச் செங்குத்தானதுமான நேர்கோடு l_2 இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.
Q என்பது l_1 இனதும் l_2 இனதும் வெட்டுப் புள்ளி எனவும் R என்பது $PQ : QR = 1 : 2$ ஆகுமாறு l_2 மீது உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். R இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



l_2 இன் படித்திறன் $= -\frac{1}{-1} = 1$ 5

l_2 இன் சமன்பாடு: $y - 4 = 1(x - 3)$

$x - y + 1 = 0$ 5

$Q \equiv (2,3).$ 5

$R \equiv (x_0, y_0)$ என்க

எனவே,

$2 = \frac{x_0+6}{3}$; $3 = \frac{y_0+8}{3}$ 5

$\therefore x_0 = 0$; $y_0 = 1.$

5

$\therefore R \equiv (0,1).$

வேறுமுறை

ஆதலால் $\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3}$

$$R \equiv \left(\frac{-2\times 3 + 2\times 3}{3-2}, \frac{-2\times 4 + 3\times 3}{3-2}\right)$$
$$\equiv (0,1)$$

25

9. $P \equiv (1,2)$ எனவும் $Q \equiv (7,10)$ எனவும் கொள்வோம். P, Q ஆகிய புள்ளிகளை ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a, b ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களை எழுதுக.

$S' \equiv S + \lambda(4x-3y+2)=0$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$ ஆகும். P, Q ஆகிய புள்ளிகள் வட்டம் $S'=0$ மீது இருக்கின்றன எனக் காட்டி, இவ்வட்டம் புள்ளி $R \equiv (1,4)$ இனூடாகச் செல்லத்தக்கதாக λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$a = 7,$ 5

$b = 10.$

$P \equiv (1, 2)$, $Q \equiv (7,10)$ ஆகிய இரண்டும் $S = 0$, $4x-3y+2=0$ என்பவற்றைத் திருப்தி செய்வதால் $S'=0$ ஆகும். 5 + 5

$\therefore P$ உம் Q உம் $S'=0$ மீது கிடக்கும்.

$R \equiv (1, 4)$ ஆனது $S'=0$ இனூடாகச் செல்வதால்

$0+(4-2)\times(4-10)+\lambda(4-12+2)=0$ 5

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2.$ 5

25

10. $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ இற்கு $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $n \in \mathbb{Z}$.

$\sec^3 a + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$

$$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \qquad 5$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)} \qquad 5$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} \qquad (\because x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \; ; \quad n \in \mathbb{Z} \text{ ஆக})$$

$$5$$

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2} \qquad 5$$

$$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}. \qquad 5$$

25

11\. (*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ இன் பிரித்துக்காட்டியை a, b என்பவற்றில் எழுதி, இதிலிருந்து, இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக் காட்டுக. இம்மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம். $\alpha + \beta, \alpha\beta$ ஆகியவற்றை a, b என்பவற்றில் எழுதுக.

இப்போது, $\beta = \alpha + 2$ எனக் கொள்வோம். $a^2 - ab + b^2 = 9$ எனக் காட்டி, $|a| \leq \sqrt{12}$ என உய்த்தறிந்து, b இனை a இல் காண்க.

(*b*) $c(\neq 0), d$ ஆகியன மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ எனவும் கொள்வோம். $f(x)$ ஆனது $(x + c)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $-c^3$ ஆகும். அத்துடன் $(x - c)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். $c = -2$ எனவும் $d = -12$ எனவும் காட்டுக.

c, d ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ ஆனது $(x^2 - 4)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதியைக் காண்க.

(a) $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

தன்மைகாட்டி $\Delta = 4(a+b)^2 - 12(ab)$ 10

$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= 4(a^2 - ab + b^2)$

$= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0$ எல்லா $a, b \in \mathbb{R}$.

5 5

5 எனவே மூலங்கள் மெய்யானவை

25

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a+b) \quad \alpha\beta = \frac{ab}{3}$ 5

5

$\beta = \alpha + 2 \Longrightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4$ 5

$\Longrightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = 4$ 5

$\Longrightarrow \frac{4}{9}(a+b)^2 - \frac{4}{3}ab = 4$ 5 + 5

$\Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9$

$\Longrightarrow a^2 - ab + b^2 = 9$ 5

35

$b^2 - ab + a^2 = 9$

$\Longrightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$

$$= -\frac{3a^2}{4} + 9$$

$$= \frac{3}{4}(12 - a^2) \quad 10$$

$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0$ 5

$\Rightarrow \quad |a| \leq \sqrt{12}$ 5

$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12 - a^2}$ 10 $\boxed{30}$

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3$ 5

5 $\Rightarrow 3c^2 + d = 0 \quad \longrightarrow (1)$

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$ 5

5 $\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0 \longrightarrow (2)$

$(2) - (1) \Rightarrow c^3 + 2c^2 = 0$ 5

$\Rightarrow c^2(c + 2) = 0$

$c \neq 0$, ஆதலால் $c = -2$ ஆகும் 5

$\Rightarrow d = -3c^2 = -12.$ 5 $\boxed{35}$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12$ ஆகும்

$f(x)$ ஆனது $x^2 - 4$, ஆல் பிரிக்கப்படும் பொழுது மீதி $\lambda x + \mu$ என்னும் வடிவில் உள்ளதென்க.

அதாவது $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu.$ 5

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x + 2)q(x) + \lambda x + \mu.$

$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu$; $f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu$

5 5

$\Rightarrow \mu = 4$; $\lambda = 2.$ 5

$\therefore$ மீதி $= 2x + 4.$ 5 $\boxed{25}$

12. (a) ஒவ்வொன்றிலும் மூன்று ஆண் பிள்ளைகளும் இரண்டு பெண் பிள்ளைகளும் இருக்கும் இரு கூட்டங்களின் உறுப்பினர்களிடையே ஆறு உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவை, குழுவில் உள்ள பெண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை உயர்ந்தபட்சம் இரண்டு ஆக இருக்கத்தக்கதாக, தெரிந்தெடுக்க வேண்டும்.

(i) குழுவுக்கு ஒவ்வொரு கூட்டத்திலிருந்தும் இரட்டை எண்ணிக்கையிலான உறுப்பினர்களைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும் எனின்,

(ii) குழுவுக்கு ஒரு பெண் பிள்ளையை மாத்திரம் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும் எனின்,

ஆக்கப்படத்தக்க அத்தகைய வெவ்வேறு குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2}$ எனவும் $U_r = \dfrac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ எனவும் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{13}{144} - \dfrac{1}{4(n+2)^2} - \dfrac{1}{4(n+3)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றது என்பதை உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$ எனக் கொள்வோம்.

$\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ எனக் காட்டுக.

12 (a) (i)

தெரிவுகளின் வேறுபட்ட வழிகள்		குழுக்களின் எண்ணிக்கை	
குழு 1	குழு 2		
2	4		
1G 1B	1G 3B	$2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$	10
2B	1G 3B	${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$	10
2B	2G 2B	${}^3C_2 \times 1 \times {}^3C_2 = 9$	10
		27	5

∴ அவ்வாறான வேறுபட்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கை= 27x2

= 54 10

45

(ii) 1G 5B

10 ${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24.$ 5

15

வேறுமுறை

குழு 1		குழு 2		குழுக்களின் எண்ணிக்கை
M(3)	F(2)	M(3)	F(2)	
2		2	2	${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 9$
2		3	1	${}^3C_2 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 6$
1	1	3	1	${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 12$
2	2	2		9
3	1	2		6
3	1	1	1	12

10 10 10 5

குழுக்களின் எண்ணிக்கை: $9 + 6 + 12 + 9 + 6 + 12 = 54$ 10

(b) $$f(r) - f(r+2) = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+3)^2}$$ 05

$$= \frac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$$ 05

$$= 4U_r$$ 05

15

எனவே

$r = 1;\quad 4U_1 = f(1) - f(3)$ 10

$r = 2;\quad 4U_2 = f(2) - f(4)$

$r = 3;\quad 4U_3 = f(3) - f(5)$

$\vdots$

$r = n-2;\quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1;\quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$

$r = n;\quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$ 10

$$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$ 10

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}.$$

40

$n \longrightarrow \infty$ ஆக வலது பக்க எல்லை $\frac{13}{144}$ ஆகும். 5

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r$

ஒருங்கும் அத்துடன் கூட்டுத்தொகை $\frac{13}{144}$ ஆகும். 5

5

15

$$t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r - \sum_{r=1}^{n-1} U_r$$ 5

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஆனது ஒருங்குவதாலால்,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{2n} U_r - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n-1} U_r$$ 5

$$= \frac{13}{144} - \frac{13}{144}$$ 5

$$= 0.$$ 5

20

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ எனவும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் தாயம் $\mathbf{P}$ ஐக் கண்டு, a இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $\mathbf{P}^{-1}$ உளதாக இருப்பதில்லை எனக் காட்டுக.

$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ எனின், $a = 2$ எனக் காட்டுக.

a இற்குரிய இப்பெறுமானத்துடன் $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{I}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம் ஆகும்.

$\mathbf{Q}^{-1}$ ஐ எழுதி, $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{R} = \left(\frac{1}{5}\mathbf{Q}\right)^{-1}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{R}$ ஐக் காண்க.

(*b*) $z = x + iy$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$ ஆகும். z இன் மட்டு $|z|$ ஐயும் உடன்புணரி $\bar{z}$ ஐயும் வரையறுக்க.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$ எனவும்

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ எனவும் $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$ எனவும்

காட்டுக.

$z \neq 1$ எனவும் $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ எனவும் கொள்வோம். $\mathrm{Re}\,w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ எனவும் $\mathrm{Im}\,w = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$ எனவும் காட்டுக.

மேலும், $z = \cos\alpha + i\sin\alpha \; (0 < \alpha < 2\pi)$ எனின், $w = i\cot\dfrac{\alpha}{2}$ எனக் காட்டுக.

(*c*) ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் A, B ஆகிய புள்ளிகள் முறையே $-3i$, 4 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன. C, D ஆகிய புள்ளிகள் முதற் கால்வட்டத்தில், $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரமாகவும் $B\hat{A}D = \theta$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன; இங்கு $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ ஆகும். C, D ஆகிய புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்களைக் காண்க.

(a) $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}$. 10

$\boxed{10}$

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0.$ 5

$\therefore a$ இன் எப் பெறுமானத்திற்கும் P^{-1} இருக்காது. 5

$\boxed{10}$

<u>வேறுமுறை</u>

P^{-1}, இருப்பதற்கு

$\begin{pmatrix}2 & 2a\\1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & c\\d & e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ 5 ஆகுமாறு $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ இருக்கும்

$\Leftrightarrow 2b+2ad=1, \quad b+ad=0, \quad 2c+2ae=0, \quad c+ae=1,$

இது தரவுக்கு முரணானது

$\therefore a$ இன் எப் பெறுமானத்திற்கும் P^{-1} இருக்காது. 5

$P\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, எனின் $\Rightarrow \begin{pmatrix}2+4a\\1+2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$. 5

$\Rightarrow 2+4a=10 \ ; \ 1+2a=5.$

$\Rightarrow a=2.$ 5 $\boxed{10}$

$a=2.$

$Q=P+I=\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}$. 5

$\therefore Q^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\-1 & 3\end{pmatrix}$. 10 $\boxed{15}$

$\therefore AA^T-\frac{1}{2}R=\left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$

$=5Q^{-1}$ 5

$\Leftrightarrow R=2AA^T-10Q^{-1}$

$=2\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\\0 & -1\end{pmatrix}-10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}3 & -4\\-1 & 3\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}2 & 6\\6 & 21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -8\\-2 & 6\end{pmatrix}$. 5

$=\begin{pmatrix}-2 & 20\\14 & 36\end{pmatrix}$. 5 5 $\boxed{20}$

(b) $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\bar{z} = x - iy$. 5 5 $\boxed{10}$

(i) $z\,\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. 5

(ii) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\,\text{Re}\,z$ 5

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\,\text{Im}\,z$. 5 $\boxed{15}$

$z \neq 1, \qquad w = \dfrac{1+z}{1-z} \times \dfrac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \dfrac{1 - z\,\bar{z} + z - \bar{z}}{|1 - z|^2} = \dfrac{1 - |z|^2 + 2i\,\text{Im}\,z}{|1 - z|^2}$

5 5 5

$\Longrightarrow \text{Re}\,w = \dfrac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$; $\text{Im}\,w = \dfrac{2\text{Im}\,z}{|1 - z|^2}$ 5 $\boxed{20}$

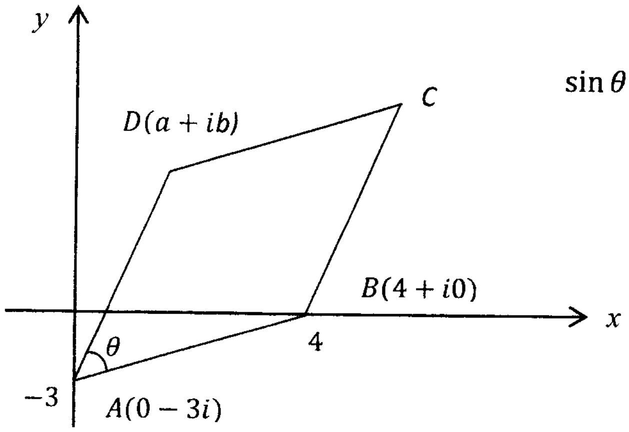
$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \; (0 < \alpha < 2\pi)$.

எனவே $|z| = 1 \Leftrightarrow \text{Re}\,w = 0$. 5

$\therefore \; w = \dfrac{2i\,\text{Im}\,z}{|1 - z|^2} = \dfrac{2i\sin\alpha}{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \dfrac{2i\sin\propto}{2(1 - coc\propto)} = i\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\cot\frac{\alpha}{2}$. 5

5 5 $\boxed{20}$

C)



$\sin\theta = \frac{7}{25}, \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{24}{25}$

$D \equiv (a, b)$ என்க

AB ஆனது A பற்றி இடம்சுழிப்போக்கில் θ கோணத்தினூடு சுழற்றப்பட்டால் AD கிடைக்கும்.

$\Rightarrow a + i(b+3) = (4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$ 10

$= (4+3i)\left(\frac{24}{25} + i\frac{7}{25}\right)$

$\Leftrightarrow a + i(b+3) = 3 + 4i.$

$\Leftrightarrow\ a = 3\,,\ b = 1.$

$\therefore D$ஆனது $3 + i$ ஐக் குறிக்கும் 5

$C \equiv (p, q)$, எனின் $\frac{p+0}{2} = \frac{3+4}{2},\ \frac{q-3}{2} = \frac{1+0}{2}.$ ஆகும்.

$\Rightarrow\ p = 7,\ q = 4.$

$\therefore C$ ஆனது $7+4i$ ஐக் குறிக்கும் 5

20

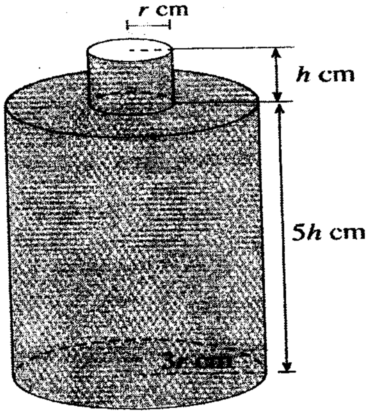
14. (a) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ இற்கு $f(x) = \dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq -1, \frac{1}{3}$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \dfrac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி $y=f(x)$ இன் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ செப்பமாக ஒரு மூலத்தைக் கொண்டிருக்கத்தக்கதாக $k \in \mathbb{R}$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $3r$ cm ஆரையையும் $5h$ cm உயரத்தையும் உடைய ஓர் அடைத்த செவ்வட்டப் பொள் உருளையின் மேல் முகத்திலிருந்து r cm ஆரையை உடைய ஒரு தட்டை அகற்றி r cm ஆரையும் h cm உயரத்தையும் உடைய ஒரு திறந்த செவ்வட்டப் பொள் உருளையை உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு பொருத்தி $391\pi\ \text{cm}^3$ கனவளவு உள்ள ஒரு போத்தல் செய்யப்பட வேண்டியுள்ளது. போத்தலின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $S\ \text{cm}^2$ ஆனது $S = \pi r(32h + 17r)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. S இழிவாக இருக்கத்தக்கதாக r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(a) $x \neq -1, \frac{1}{3}$; இற்கு $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$.

எனவே $f'(x) = \dfrac{16(x+1)^2(3x-1) - 16(x-1)[2(x+1)(3x-1) + 3(x+1)^2]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$ 15

$= \dfrac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$; $x \neq -1, \frac{1}{3}$ ஆக 10

25

கிடை அணுகுகோடுகள்: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \Rightarrow y = 0.$ 5

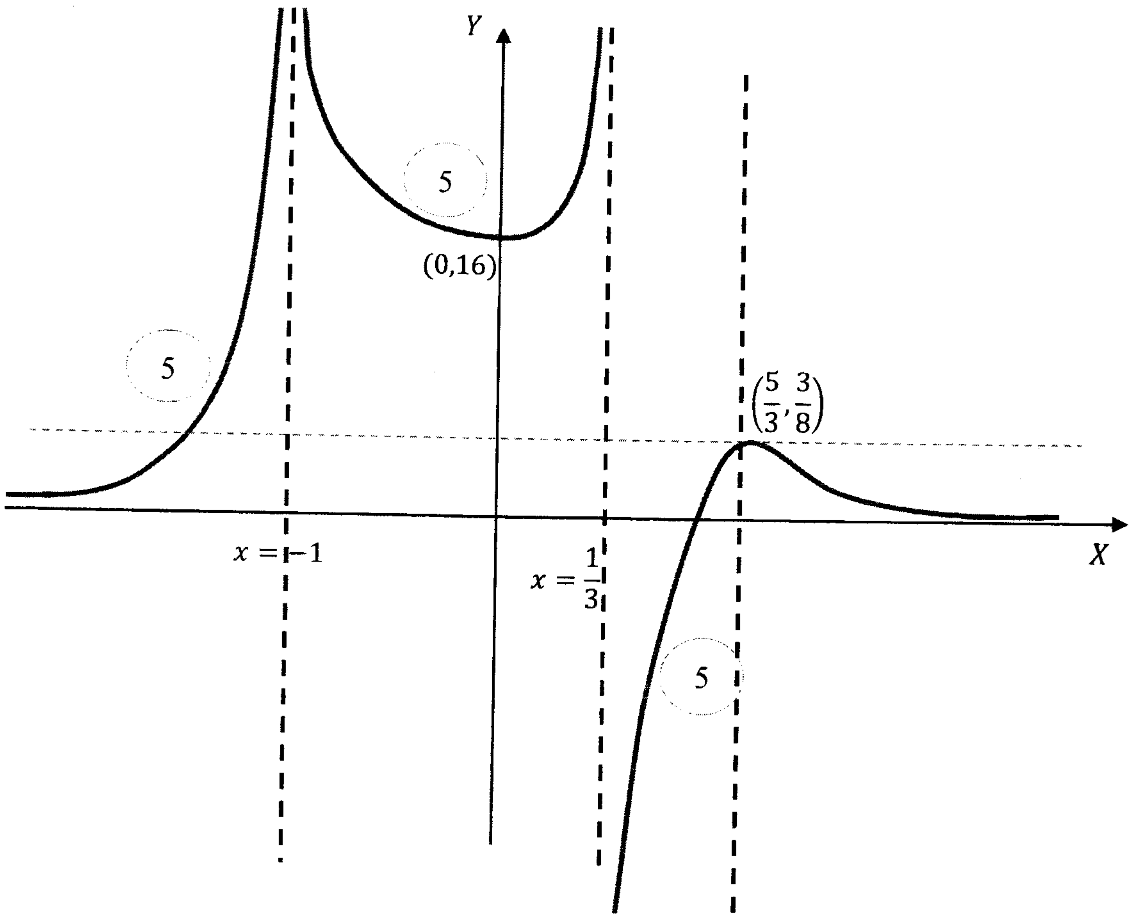
நிலைக்குத்து அணுகுகோடுகள்: $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$ 5

$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) \to \infty$, $\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} f(x) \to \infty$; $\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) \to -\infty$.

திரும்பல் புள்ளிகளில் $f'(x) = 0$. $\Rightarrow$ $x = 0$; $x = \frac{5}{3}$

	5	5	5	5	5
	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \infty$
Sign of $f'(x)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$
	f அதிகரிக்கும்	f குறையும்	f அதிகரிக்கும்	f அதிகரிக்கும்	f குறையும்

இரண்டு திரும்பல் புள்ளிகள் உண்டு: $(0,16)$ என்பது ஓரிட இழிவும் $\left(\frac{5}{3},\frac{3}{8}\right)$ என்பது ஓரிட உயர்வுமாகும். 5 5



60

$$k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1).$$

$$\Rightarrow k = \frac{16(x-1).}{(x+1)^2(3x-1)}.$$ 5

$k \leq 0$ or $\frac{3}{8} < k < 16$, எனின் தரப்பட்ட சமன்பாடு சரியாக ஒரு மூலத்தைக் கொண்டிருக்கும்.. 15

5 5

(b) கனவளவு: $391\pi = \pi(3r)^2(5h) + \pi r^2 h$ 10

$391 = 46r^2 h$

$h = \frac{17}{2r^2}$, $(r > 0)$. 5

மேற்பரப்பளவு: $S = \pi r(32h + 17r)$.

$= 17\pi\left(\frac{16}{r} + r^2\right)$ 5

5 $\frac{dS}{dr} = 17\pi\left(-\frac{16}{r^2} + 2r\right) = \frac{34\pi(r^3-8)}{r^2}$ 5

$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 2.$ 5

For $0 < r < 2$, $\frac{dS}{dr} < 0$ and $r > 2$, $\frac{dS}{dr} > 0.$ 5

5

$\therefore$ $r = 2$ ஆகும் பொழுது S இழிவாகும் 50

5

15. (a) (i) x^2, x^1, x^0 ஆகியவற்றின் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம், எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
இதிலிருந்து, $\frac{1}{x^3(x-1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி, $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(ii) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int x^2 \cos 2x\,dx$ ஐக் காண்க.

(b) பிரதியீடு $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ஐப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ ஐக் காண்க.

(a) (i) $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$

x இன் வலுவின் குணகங்களை ஒப்பிட

$x^2 \;: -A + B = 0$ 5

$$x^1 \quad : -B + C = 0 \quad 5$$
$$x^0 \quad : \quad -C = 1 \quad 5$$

$A = -1, B = -1$ and $C = -1$ 5

$1 = -x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1) + x^3$

20

$$\therefore \frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1} \quad 5$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^3(x-1)} = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C, \quad 5$$

5 5 5 5

இங்கு C என்பது எதேச்சையான மாறிலியாகும்.

30

(iii) $\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int 2x \sin 2x \, dx$ 5

5

5

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx \quad 5$$

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$$ இங்கு C என்பது எதேச்சையான மாறிலியாகும்

5 5

30

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x); \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\tan\theta = \cos x \implies \sec^2\theta \, d\theta = -\sin x \, dx \quad 5$$

$$\theta = 0 \implies \theta = \tan^{-1} 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\theta = \pi \implies \theta = \tan^{-1} -1 \implies \theta = -\frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta \, d\theta \quad 5$$

5 5

$\left(\sqrt{sec^2\theta} = \sec\theta\right)$ இங்கு $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)} d\theta \quad 5$$

$$= ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \quad 5$$

$$= ln(\sqrt{2}+1) - ln(\sqrt{2}-1) \quad 5$$

$$= ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)\,(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1)}\right)$$

$$= 2\,ln(\sqrt{2}+1). \quad 5$$

$\boxed{50}$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}}dx \quad 5$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx \quad 5$$

$$\Rightarrow I = \pi[2\ln(\sqrt{2}+1)] - I \quad 5$$

$$\Rightarrow 2I = 2\,\pi\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\Rightarrow I = \pi\ln(\sqrt{2}+1). \quad 5$$

$\boxed{20}$

---

16. $A \equiv (-2, -3)$ எனவும் $B \equiv (4, 5)$ எனவும் கொள்வோம். புள்ளி A இனூடாகச் செல்லும் l_1, l_2 ஆகிய கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் கோடு AB உடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக l_1, l_2 ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

P, Q ஆகிய புள்ளிகள் முறையே l_1, l_2 ஆகியவற்றின் மீது, $APBQ$ ஒரு சதுரமாக இருக்கத்தக்கதாக, எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

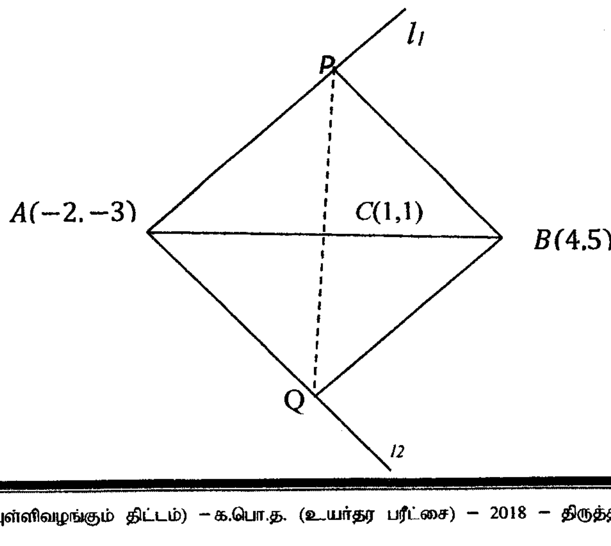
PQ இன் சமன்பாட்டைக் கண்டு, P, Q ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அத்துடன், A, P, B, Q ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$\lambda > 1$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$ ஆனது வட்டம் S இற்கு வெளியே இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

புள்ளி R இலிருந்து வட்டம் S இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$\lambda(> 1)$ மாறும்போது இத்தொடுகை நாண்கள் ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றன எனக் காட்டுக.



$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{4}{3}}{1+\frac{4m}{3}}\right|$$ 10

$\Rightarrow \left(m-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{4m}{3}\right)^2$ 5

$\Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0$

$\Rightarrow (7m-1)(m+7) = 0$

$\Rightarrow m = \frac{1}{7}$ or $m = -7$

5 l_1 இன் சமன்பாடு : $y+3 = \frac{1}{7}(x+2) \Rightarrow x - 7y - 19 = 0$ 5 1

l_2 இன் சமன்பாடு : $y + 3 = -7(x+2) \Rightarrow 7x + y + 17 = 0$ 10

45

PQ இன் சமன்பாடு : $y - 1 = \frac{-3}{4}(x-2) \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$ 1

PQ , l_1 இன் இடைவெட்டும் புள்ளி $P \equiv (5,-2)$ 5

$Q \equiv (x_0, y_0)$ எனின்

$\Rightarrow \frac{5+x_0}{2} = 1 \Rightarrow x_0 = -3$ 5

$\frac{-2+y_0}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 4$ 5

$Q \equiv (-3, 4)$.

25

A, P, B, Q என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டமானது, AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும்.

$(y-5)(y+3) + (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ 10

20

10

வட்டத்தின் ஆரை 5

$\lambda > 1$ ஆக $CR^2 = (4\lambda - 1)^2 - (5\lambda - 1)^2$ 10

$CR^2 - 25 = (4\lambda-1)^2 - (5\lambda-1)^2 - 25$ 5

$= 41\lambda^2 - 18\lambda - 23$

$= (\lambda - 1)(41\lambda + 23) > 0$ .10

எனவே R ஆனது வட்டத்திற்கு வெளியே கிடக்கும். 5

30

R இல் தொடுநாணின் சமன்பாடு :

10

$$x(4\lambda) + y(5\lambda) - (x + 4\lambda) - (y + 5\lambda) - 23 = 0$$

$$(-x - y - 23) + \lambda(4x + 5y - 9) = 0$$ 5

என்பது $\lambda > 1$ ஆக இருக்கும் போது $4x + 5y - 9 = 0,\ x + y + 23 = 0$ என்னும் கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் 10

இது ஓர் நிலைத்த புள்ளி 5

30

---

17. (*a*) $0 \le \theta \le \pi$ இற்கு $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ ஐத் தீர்க்க.

$\cos 2\theta$ ஐயும் $\cos 3\theta$ ஐயும் $\cos\theta$ இல் எழுதி,

$\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ எனக் காட்டுக; இங்கு $t = \cos\theta$.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ இன் மூன்று மூலங்களையும் எழுதி, சமன்பாடு $4t^2 - 2t - 1 = 0$ இன் மூலங்கள் $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ எனக் காட்டுக.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(*b*) ABC ஒரு முக்கோணி எனவும் D ஆனது BC மீது, $BD : DC = m : n$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $m, n > 0$ ஆகும். $B\hat{A}D = \alpha$ எனவும் $D\hat{A}C = \beta$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. BAD, DAC ஆகிய முக்கோணிகளுக்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி,

$\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $b = AC$ உம் $c = AB$ உம் ஆகும்.

இதிலிருந்து, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

(a) $0 \le \theta \le \pi$ ஆக $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$ 5 5

$$3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta),\ n \in \mathbb{Z}.$$ 5

$$5\theta = 2n\pi + \pi\ ;\ \theta = 2n\pi - \pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$0 \le \theta \le \pi$ ஆதலால் , $\theta = \pi,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5}$ என்பன தீர்வுகளாகும்.

5 5 5

30

---

5 5

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ and $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

$\cos 2\theta + \cos 3\theta = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1$

$= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$, இங்கு $t = \cos\theta$. 10

20

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0 \longrightarrow (1)$ இன் மூலங்கள் $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ இன் மூலங்களாகும்.

எனவே $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5}$ என்பன (1) இன் மூலங்களாகும். 10

$\cos\pi = -1 \implies t + 1$ என்பது $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ இன் காரணியாகும்.

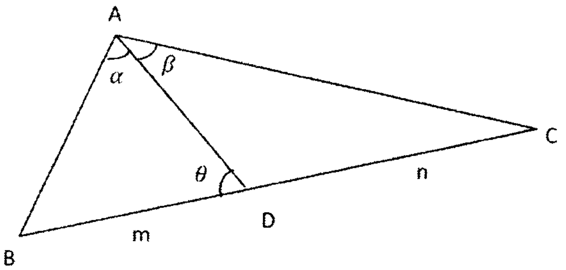
$\implies 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$ 10

$\implies \cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ என்பன $4t^2 - 2t - 1 = 0$. இன் மூலங்களாகும். 5

$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4\times4\times1}}{2\times4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ 5

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ என்பதால் $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ ஆகும். 5 35

(b).



$B\hat{D}A = \theta$ என்க

சைன் விதிப்படி:

முக்கோணம் BAD இல் :$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\theta}$ 5 + 5

முக்கோணம் ADC இல்: $\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\pi - \theta)}$ 1

$$\Rightarrow \frac{m \sin\beta}{n \sin\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad 5$$

25

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb-nc}{mb+nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc} \quad 5$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad 5 \quad 5$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \quad 5$$

$\boxed{20}$

(c) Let $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ and $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta, \quad 0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$

$$5 \quad 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ ($\frac{\pi}{2} - \delta$ கூர்ங்கோணம் ஆதலால் 2γ கூர்ங்கோணம் ஆகும்)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \quad 5$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4} \quad 5$$

$$\therefore 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}. \quad 5$$

$\boxed{30}$
