සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි.

රහස්‍ය ලේඛනයකි.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

# 10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
පරීක්ෂක සාකච්ඡා පැවැත්වෙන අවස්ථාවේදී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

# අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

## 10 - සංයුක්ත ගණිතය

## ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

| | | | |
|---|---|---|---|
| A කොටස : | 10 X 25 | = | 250 |
| B කොටස : | 05 X 150 | = | 750 |

**එකතුව** = 1000/10

I පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

# උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

**උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03**

(i) ..................................................
..................................................  √  $\frac{4}{5}$
..................................................

(ii) ..................................................
..................................................  √  $\frac{3}{5}$
..................................................

(iii) ..................................................
..................................................  √  $\frac{3}{5}$
..................................................

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

**බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)**

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.
3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

**ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :**

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

**ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :**

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රයට අදාළ ලකුණු ලකුණු ලැයිස්තුවේ "I වන පත්‍රය" තීරුවේ ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලියන්න. අදාළ විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කර "II වන පත්‍රය" තීරුවේ II පත්‍රයේ අවසාන ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ විට, ව:පැ: $= 1^3 = 1$ හා ද:පැ: $= \frac{1}{4} \cdot 1^2 (1+1)^2 = 1$. 5

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2$. 5

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ 5

$$= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \frac{[p^2 + 4p + 4]}{4}.$$

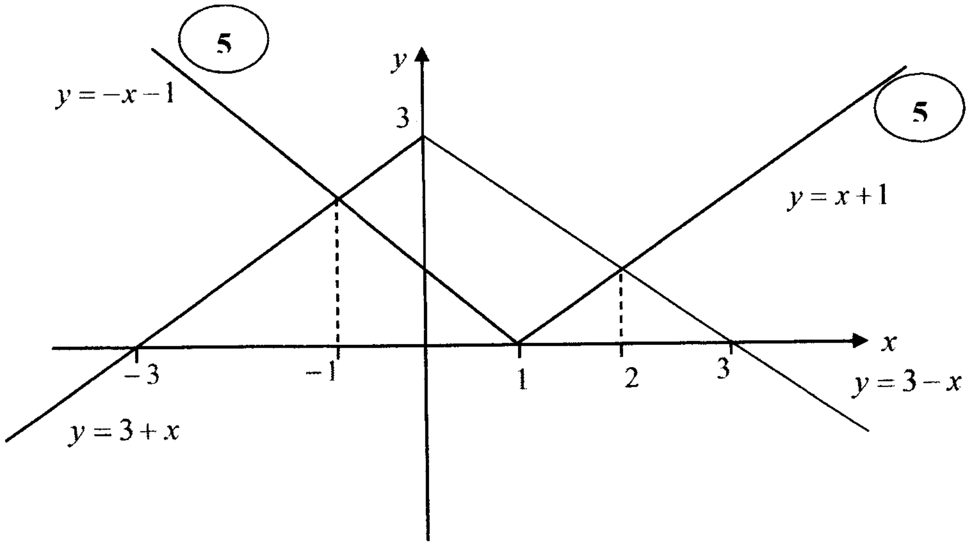
$$= \frac{1}{4} (p+1)^2 (\overline{p+1} + 1)^2.$$ 5

එනයින් $n = p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n = p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. අපි දැනටමත් $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත. එනයින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

2. එක ම රූප සටහනක $y = 3 - |x|$ හා $y = |x - 1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

**ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ**, $|x| + |x - 1| \leq 3$ අසමානතාව සපුරාලන $x$ හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.




ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වලදී $-x+1 = 3+x$ හෝ $x-1 = 3-x$

එනම්, $x = -1$ හෝ $x = 2$. 5

තවද, $|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad |x-1| \leq 3 - |x|$ 5

එනයින්, ප්‍රස්තාරයෙන්, විසඳුම් $-1 \leq x \leq 2$ තෘප්ත කරන $x$ අගයන් වේ. 5

25

---

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x| + |x-1| \leq 3$

(i) අවස්ථාව $x \leq 0$: $|x| + |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -x-(x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow -2x+1 \leq 3$ 5

$\Leftrightarrow x \geq -1$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $-1 \leq x \leq 0$ තෘප්ත කරන $x$ අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \leq 1$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 3$$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $0 < x \leq 1$ වේ. 5

(iii) අවස්ථාව $1 < x$

$$|x| + |x-1| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x + x - 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 4$$

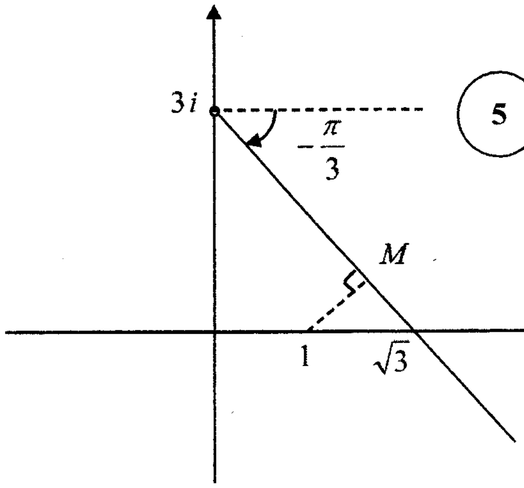
$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $1 < x \leq 2$ වේ.

එනයින් විසඳුම් $-1 \leq x \leq 2$ තෘප්ත කරන $x$ අගයන් වේ. 5

**3.** ආගන්ඩ් සටහනක, $\operatorname{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3}$ සපුරාලන $z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\operatorname{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.




5 + 5

$$\operatorname{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\overline{(\bar{z}+3i)} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3}.$$ 5

එනයින්, $\operatorname{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය $NM$ දෙනු ලබයි. 5

මෙහි $NM = (\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})}{2}.$ 5

25

4. $\left(x^2+\dfrac{3k}{x}\right)^8$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ $x$ හා $x^4$ හි සංගුණක සමාන වේ. $k$ නියතයෙහි අගය සොයන්න.

$$\left(x^2+\frac{3k}{x}\right)^8=\sum_{r=0}^{8}{}^8C_r(x^2)^r\left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r} \quad 5$$

$$=\sum_{r=0}^{8}{}^8C_r(3k)^{8-r}x^{3r-8}$$

$$x^1 : 3r-8=1 \Leftrightarrow r=3.$$
$$x^4 : 3r-8=4 \Leftrightarrow r=4. \quad 5$$

දත්තයෙන් ${}^8C_r(3k)^5={}^8C_4(3k)^4$ 5

$$\frac{8!}{3!\,5!}3^5k=\frac{8!}{4!\,4!}3^4 \quad 5$$

$$k=\frac{5}{12}. \quad 5$$

**5.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \dfrac{\pi^2}{32}$ **බව පෙන්වන්න.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)}$$ 5

$$= \lim_{x\to 0} 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{x+1}$$

5

$$= 2\cdot 1\cdot\frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{1}{1}$$ 5 5

$$= \frac{\pi^2}{32}.$$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)}\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}$$ 5

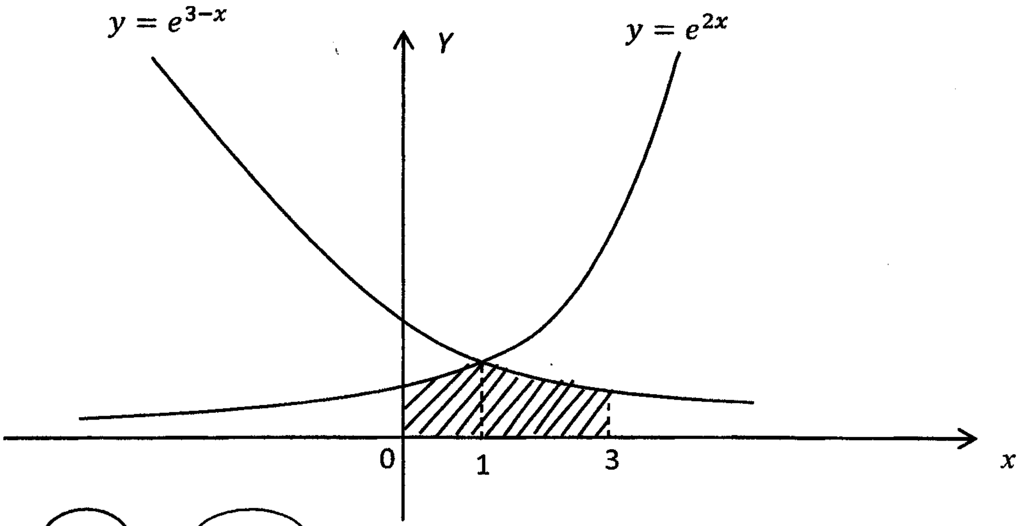
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

5

$$= 1\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}$$ 5 5

$$= \frac{\pi^2}{32}.$$ 5

**6.** $y = e^{2x}$, $y = e^{3-x}$, $x = 0$, $x = 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක $\frac{3}{2}(e^2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.




5 5

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^3 e^{3-x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 + \frac{e^{3-x}}{(-1)}\Big|_1^3 \quad 5$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1) + e^2 \quad 5$$

$$= \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(e^2 - 1). \quad 5$$

| 25 |
|---|

---

**7.** $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ සඳහා $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ හා $y = \sin t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් $C$ වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{2\pi}{3}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $C$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \qquad y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2} \quad 5 \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t \quad 5$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} \qquad 5$$

$$= \frac{1}{\sin t}$$

දැන් $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos t \sin t \qquad 5$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

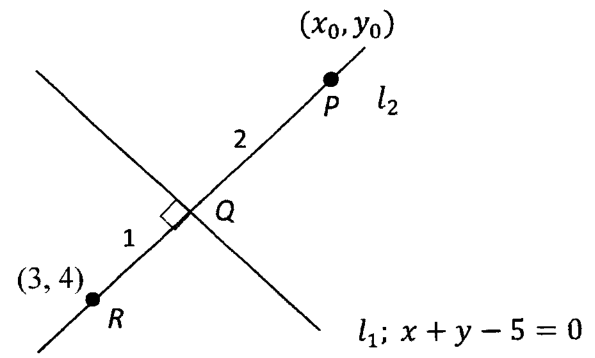
5

$\boxed{25}$

---

8. $l_1$ යනු $x + y - 5 = 0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $P \equiv (3, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා $l_1$ ට ලම්බ වූ $l_2$ සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$Q$ යනු $l_1$ හා $l_2$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද $R$ යනු $PQ : QR = 1 : 2$ වන පරිදි $l_2$ මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. $R$ හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.




$l_2$ හි අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{-1} = 1 \qquad 5$

$l_2$ සමීකරණය : $y - 4 = 1(x - 3)$

$x - y + 1 = 0 \qquad 5$

5 $\qquad Q \equiv (2,3).$

$R \equiv (x_0, y_0)$ යයි ගනිමු.

එවිට,

$2 = \frac{x_0+6}{3}$ සහ $3 = \frac{y_0+8}{3} \qquad 5$

වෙනත් ක්‍රමයක්

5

$\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3}$ බැවින්

$$R \equiv \left(\frac{-2\times3+2\times3}{3-2}, \frac{-2\times4+3\times3}{3-2}\right)$$

$= (0,1)$

5

$\therefore x_0 = 0$ සහ $y_0 = 1$.

$\therefore R \equiv (0,1)$. 5

25

---

**9.** $P \equiv (1,2)$ හා $Q \equiv (7,10)$ යැයි ගනිමු. $P$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ වන පරිදි $a$ හා $b$ නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' \equiv S + \lambda(4x-3y+2)=0$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. $P$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය $S'=0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය $R \equiv (1,4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි $\lambda$ හි අගය සොයන්න.

$a = 7,$

$b = 10.$ 5

$P \equiv (1,2)$ සහ $Q \equiv (7,10)$ යන දෙකම $s=0$ සහ $4x-3y+2=0$ යන දෙකම තෘප්ත කරන

බැවින් $s'=0$ වේ. 5 5

$\therefore P$ සහ $Q$ ලක්ෂ්‍ය $s'=0$ මත පිහිටයි.

$s'=0$ යන්න $R \equiv (1,4)$ හරහා යයි නම්,

$0+(4-2)\times(4-10)+\lambda(4-12+2)=0$ වේ. 5

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2$. 5

25

---

**10.** $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ සඳහා $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ.

$$\sec^3 a = 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \qquad 5$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)} \qquad 5$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} \quad 5 \qquad \because n \in \mathbb{Z} \text{ සඳහා } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2} \qquad 5$$

$$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}. \qquad 5$$

25

---

**11.** (*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ සමීකරණයේ විවේචකය $a$ හා $b$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒ නයින්**, මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

මෙම මූල $\alpha$ හා $\beta$ යැයි ගනිමු. $a$ හා $b$ ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වන්න.

දැන්, $\beta = \alpha + 2$ යැයි ගනිමු. $a^2 - ab + b^2 = 9$ බව පෙන්වා,

$|a| \leq \sqrt{12}$ බව **අපෝහනය** කර, $a$ ඇසුරෙන් $b$ සොයන්න.

(*b*) $c(\neq 0)$ හා $d$ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ යැයි ද ගනිමු. $(x + c)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-c^3$ වේ. තව ද $(x - c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c = -2$ හා $d = -12$ බව පෙන්වන්න.

$c$ හා $d$ හි මෙම අගයන් සඳහා $(x^2 - 4)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a) $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

විවේචකය $\Delta = 4(a+b)^2 - 12(ab)$

$$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) \qquad 10$$

$$= 4(a^2 - ab + b^2)$$

$$= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0 \text{ for all } a, b \in \mathbb{R}.$$ 5

5

ඒ නයින්, මූල තාත්ත්වික වේ. 5

25

---

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a + b) \qquad \alpha\beta = \frac{ab}{3}$$

5 5

$$\beta = \alpha + 2 \Rightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4$$ 5

$$\Rightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\,\alpha\beta = 4$$ 5

$$\Rightarrow \frac{4}{9}(a + b)^2 - \frac{4}{3}\,ab = 4$$ 5 5

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 9$$ 5

35

---

$$b^2 - ab + a^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$$

$$= -\frac{3a^2}{4} + 9$$

$$= \frac{3}{4}(12 - a^2)$$ 1

$$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0$$ 5

$$\Rightarrow \quad |a| \leq \sqrt{12}$$ 5

$$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12 - a^2}.$$ 10

30

---

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3$ 5

5 $\Rightarrow 3c^2 + d = 0 \quad -----(1)$

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$ 5

5 $\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0 -----(2)$

$(2) - (1)$ මගින් $c^3 + 2c^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\Rightarrow c^2(c+2) = 0$

$c \neq 0$, නිසා $c = -2.$ 5

$\Rightarrow d = -3c^2 = -12.$ 5

35

---

දැන් $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12.$

$f(x)$ යන්න $x^2 - 4$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $\lambda x + \mu$ ආකාරය ගනී.

එනම් $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu.$ 5

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x+2)q(x) + \lambda x + \mu.$

$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu$ හා $f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu$

5 5

$\Rightarrow \mu = 4$ හා $\lambda = 2.$ 5

$\therefore$ ශේෂය $= 2x + 4.$ 5

25

**12.** (*a*) එක එකක පිරිමි ළමයින් තිදෙනකු හා ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන්, සාමාජිකයන් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැනු ළමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි තරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම්,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැනු ළමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් කමිටු ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r = \dfrac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $t_n = \displaystyle\sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\lim\limits_{n \to \infty} t_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

(a) (i)

| තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන | | කමිටු ගණන | |
|---|---|---|---|
| **1** කණ්ඩායම | **2** කණ්ඩායම | | |
| **2** | **4** | | |
| 1G 1B | 1G 3B | $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ | 10 |
| 2B | 1G 3B | ${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$ | 10 |
| 2B | 2G 2B | ${}^3C_2 \times {}^2C_2 \times {}^3C_2 = 9$ | 10 |
| | | 27 | 5 |

$\therefore$ වෙනස් කමිටු ගණන $= 27 \times 2$

$= 54$ 10

45

(ii) 1G 5B

10 ${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24.$ 5

15

(i) වෙනත් ක්‍රමයක්

| 1 කණ්ඩායම | | 2 කණ්ඩායම | | කමිටු ගණන |
|---|---|---|---|---|
| M(3) | F(2) | M(3) | F(2) | |
| 2 | | 2 | 2 | ${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 9$ |
| 2 | | 3 | 1 | ${}^3C_2 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 6$ |
| 1 | 1 | 3 | 1 | ${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 12$ |
| 2 | 2 | 2 | | 9 |
| 3 | 1 | 2 | | 6 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 12 |

10

10

10

5

කමිටු ගණන: $9 + 6 + 12 + 9 + 6 + 12 = 54$ 10

(b)

$$f(r)-f(r+2)=\frac{1}{(r+1)^2}-\frac{1}{(r+3)^2} \qquad 5$$

$$=\frac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2} \qquad 5$$

$$=4U_r \qquad 5$$

15

---

එවිට

$$r=1; \quad 4U_1=f(1)-f(3)$$
$$r=2; \quad 4U_2=f(2)-f(4) \qquad 10$$
$$r=3; \quad 4U_3=f(3)-f(5)$$
$$\vdots$$
$$r=n-2; \quad 4U_{n-2}=f(n-2)-f(n)$$
$$r=n-1; \quad 4U_{n-1}=f(n-1)-f(n+1)$$
$$r=n; \quad 4U_n=f(n)-f(n+2) \qquad 10$$

$$4\sum_{r=1}^{n}U_r=f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2) \qquad 10$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{13}{144}-\frac{1}{4(n+2)^2}-\frac{1}{4(n+3)^2}. \qquad 10$$

40

---

$n\to\infty$ විට දැ.පැ. හි සීමාව $\frac{13}{144}$. 5

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty}U_r$ අභිසාරී වන අතර එකතුව $\frac{13}{144}$. 5 5

15

---

$$t_n=\sum_{r=n}^{2n}U_r$$

$$=\sum_{r=1}^{2n}U_r-\sum_{r=1}^{n-1}U_r \qquad 5$$

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බැවින්

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n} U_r - \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1} U_r \quad 5$$

$$= \frac{13}{144} - \frac{13}{144} \quad 5$$

$$= 0. \quad 5$$

20

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයා, $a$ හි කිසිදු අගයකට $\mathbf{P}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

$a$ සඳහා මෙම අගය සහිත ව, $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{I}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයයි.

$\mathbf{Q}^{-1}$ ලියා දක්වා $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{R} = \left(\frac{1}{5}\mathbf{Q}\right)^{-1}$ වන පරිදි $\mathbf{R}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. $z$ හි, මාපාංකය $|z|$ හා ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$,

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$ හා $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ යැයි ගනිමු. $\mathrm{Re}\,w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ හා $\mathrm{Im}\,w = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 < \alpha < 2\pi)$ නම්, $w = i\cot\frac{\alpha}{2}$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

(*c*) ආගන්ඩ් සටහනක, $A$ හා $B$ ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් $-3i$ හා 4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. $C$ හා $D$ ලක්ෂ්‍ය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන්නේ $ABCD$ රොම්බසයක් හා $B\hat{A}D = \theta$ වන පරිදි ය; මෙහි $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ වේ. $C$ හා $D$ ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}.$ 10

10

---

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0.$ 5

$\therefore$ $a$ හි කිසිම අගයක් සඳහා $P^{-1}$ නොපවතී. 5

10

---

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$P^{-1}$ පැවතීම සඳහා

5

$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය.

$\Leftrightarrow 2b + 2ad = 1, \quad b + ad = 0, \quad 2c + 2ae = 0$ සහ $c + ae = 1,$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ $a$ හි කිසිම අගයක් සඳහා $P^{-1}$ නොපවතී.

5

10

If $P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම් $\begin{pmatrix} 2+4a \\ 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$ 5

$\Leftrightarrow 2 + 4a = 10$ සහ $1 + 2a = 5.$

$\Leftrightarrow a = 2.$ 5

10

---

$a = 2.$

$Q = P + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 5

$\therefore Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$ 10

15

---

$AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$

$= 5Q^{-1}.$ 5

$\Leftrightarrow R = 2AA^T - 10Q^{-1}$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 5

5

$= 2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$

$= \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 14 & 36 \end{pmatrix}.$ 5

20

(b) $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

5 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ සහ $\bar{z} = x - iy.$ 5　　10

(i) $z\,\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$ 5

(ii) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re} z$ සහ 5

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im} z.$ 5　　15

---

$z \neq 1$ නම් $w = \dfrac{1+z}{1-z} \times \dfrac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \dfrac{1 - z\bar{z} + z - \bar{z}}{|1-z|^2} = \dfrac{1 - |z|^2 + 2i\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$

5　　5　　5

$\Rightarrow \operatorname{Re} w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ සහ $\operatorname{Im} w = \frac{2\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$ 5　　20

---

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha\ (0 < \alpha < 2\pi).$

එවිට $|z| = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} w = 0.$ 5

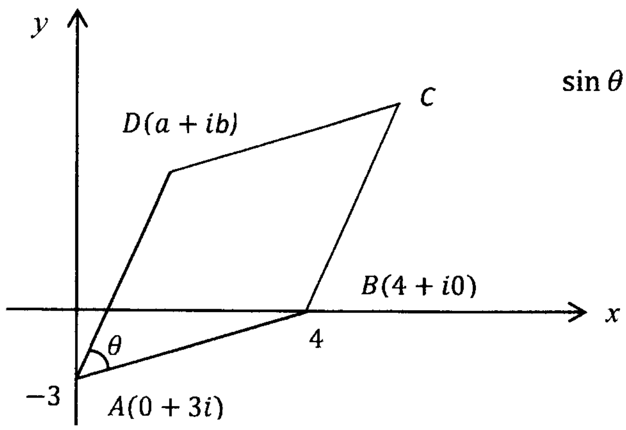
$$\therefore\ w = \frac{2i\operatorname{Im} z}{|1-z|^2} = \frac{2i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{2i\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = i\,\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\cot\frac{\alpha}{2}.$$

5　　5　　5

20

---

(c)




$\sin\theta = \dfrac{7}{25}, \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{24}{25}$

$D \equiv (a, b)$ යයි ගනිමු.

$A$ වටා $AB$ වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් $AD$ ගත හැක.

$\therefore a + i(b+3) = (4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (4+3i)\left(\frac{24}{25} + i\frac{7}{25}\right)$ 10

$\Leftrightarrow a + i(b+3) = 3 + 4i.$

$\Leftrightarrow a = 3$ හා $b = 1.$

$\therefore D$ මගින් $3 + i$ නිරූපණය කරයි. 05

$C \equiv (p, q)$, නම්, $\frac{p+0}{2} = \frac{3+4}{2}$ හා $\frac{q-3}{2} = \frac{1+0}{2}.$

$\Rightarrow p = 7$ හා $q = 4.$

$\therefore C$ මගින් $7+4i$ නිරූපණය කරයි. 05 $\boxed{30}$

---

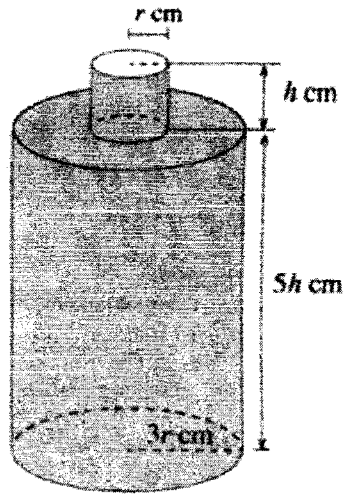
**14.** (*a*) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \dfrac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි $k \in \mathbb{R}$ හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) අරය $3r$ cm හා උස $5h$ cm වන සංවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩත් මුහුණතින් අරය $r$ cm වන තැටියක් ඉවත් කර, අරය $r$ cm හා උස $h$ cm වන විවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවිකර $391\pi$ cm$^3$ ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S$ cm$^2$ යන්න $S = \pi r(32h + 17r)$ **බව දී ඇත.** $S$ අවම වන පරිදි $r$ හි අගය සොයන්න.




(a) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා; $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}.$

එවිට

$$f'(x) = \frac{16(x+1)^2(3x-1) - 16(x-1)[2(x+1)(3x-1) + 3(x+1)^2]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$ 15

$$= \frac{16(x+1)[(x+1)(3x-1) - 2(x-1)(3x-1) - 3(x-1)(x+1)]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2};\ \left(x \neq -1, \frac{1}{3}\right).$$ 10

25

---

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, එවිට $y = 0$. 5

$\lim_{x\to-1^\pm} f(x) \to \infty$ , $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) \to \infty$ සහ $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) \to -\infty$.

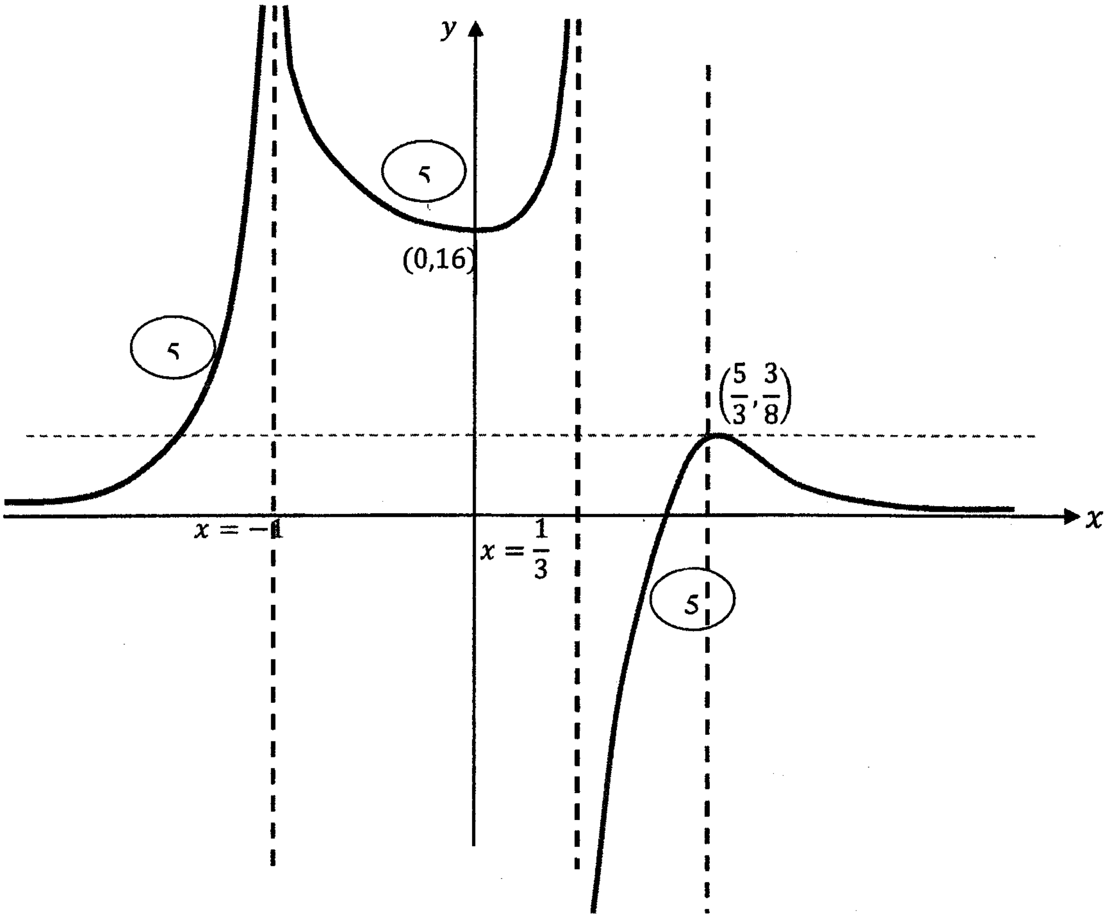
සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $x = -1$ සහ $x = \frac{1}{3}$. 5

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය වලදී $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ හෝ $x = \frac{5}{3}$.

| | $-\infty < x < -1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x < \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3} < x < \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ ලකුණ | $(+)$ | $(-)$ | $(+)$ | $(+)$ | $(-)$ |
| | $f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ |
| | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය: $(0,16)$ ස්ථානීය අවමයක් සහ $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{8}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක්.

5 5




60

$k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1).$

$$\Leftrightarrow k = \frac{16(x-1).}{(x+1)^2(3x-1)}. \quad 5$$

$k \leq 0$ හෝ $\frac{3}{8} < k < 16$ නම් පමණක් දෙන ලද සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක්
5 5
පමණක් පවතී.

15

(b) පරිමාව: $391\pi = \pi(3r)^2(5h) + \pi r^2 h$

$$\Rightarrow 391 = 46r^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{17}{2r^2}, \quad (r > 0). \quad 5 \quad 10$$

පෘෂ්ඨීය වර්ගඵලය: $S = \pi r(32h + 17r).$

$$= 17\pi\left(\frac{16}{r} + r^2\right) \quad 5$$

5 $$\frac{dS}{dr} = 17\pi\left(-\frac{16}{r^2} + 2r\right) = \frac{34\pi(r^3 - 8)}{r^2}$$ 5

$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 2.$ 5

$0 < r < 2$ විටදී $\frac{dS}{dr} < 0$ සහ $r > 2$ විටදී $\frac{dS}{dr} > 0.$

5 5

$\therefore\ r = 2$ විටදී $S$ අවම වේ. 5

50

**15.** (a) (i) $x^2, x^1$ හා $x^0$ හි සංගුණක සැසඳීමෙන්,
සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$ වන පරිදි $A, B$ හා $C$ නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \cos 2x\,dx$ සොයන්න.

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$a$ නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

(a) (i) $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$

සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$x^2 \ : -A + B = 0$   5

$x^1 \ : -B + C = 0$   5

$x^0 \ : \quad -C = 1$   5

$A = -1, B = -1$ and $C = -1$   5

$\boxed{20}$

---

$1 = -x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1) + x^3$

$\therefore \dfrac{1}{x^3(x-1)}$ භින්න භාග ඇසුරින්:

$\dfrac{1}{x^3(x-1)} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x-1}$ ලෙස වේ.   5

එනයින් $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$

$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C,$   5

5   5   5   5

මෙහි $C$ යනු අභිමත නියතයක් වේ.

$\boxed{30}$

---

(ii) $\int x^2 \cos 2x\,dx = \dfrac{x^2 \sin 2x}{2} - \dfrac{1}{2}\int 2x \sin 2x\,dx$   5   5

$= \dfrac{x^2 \sin 2x}{2} + \dfrac{x\cos 2x}{2} - \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$   5   5

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$$ මෙහි $C$ යනු අභිමත නියතයක් වේ. 5 5

30

---

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x);\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\tan\theta = \cos x \implies \sec^2\theta\, d\theta = -\sin x\, dx$$ 5

$$x = 0 \implies \theta = \tan^{-1}(1) \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$ 5

$$x = \pi \implies \theta = \tan^{-1}(-1) \implies \theta = -\frac{\pi}{4}$$ 5

5 5 5

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta \quad \left(\sqrt{sec^2\theta} = \sec\theta \text{ as } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)}\, d\theta$$ 5

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)$$ 5

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right)$$

$$= 2\ln(\sqrt{2}+1).$$ 5

50

---

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi - x)}}\, dx$$ 5

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx$$ 5

$$\implies I = \pi[2\ln(\sqrt{2}+1)] - I$$ 5

$$\implies 2I = 2\pi \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\implies I = \pi \ln(\sqrt{2+1}).$$ 5

20

16. $A \equiv (-2, -3)$ හා $B \equiv (4, 5)$ යැයි ගනිමු. $AB$ රේඛාව සමග $l_1$ හා $l_2$ රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි $A$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $l_1$ හා $l_2$ රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

$P$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් $l_1$ හා $l_2$ මත ගෙන ඇත්තේ $APBQ$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය.

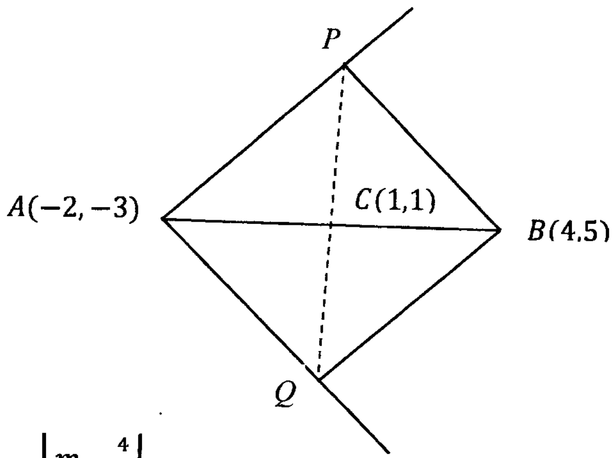
$PQ$ හි සමීකරණය සොයා, $P$ හා $Q$ හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තව ද $A, P, B$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන $S$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda > 1$ යැයි ගනිමු. $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$ ලක්ෂ්‍යය, $S$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$R$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda (> 1)$ විචලනය වන විට, මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.




$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4m}{3}}\right| \quad 10$$

$$\Rightarrow \left(m - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{4m}{3}\right)^2 \quad 5$$

$$\Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7m - 1)(m + 7) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{7} \text{ or } m = -7.$$

5 5

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණ වන්නේ:

(i) $y+3=\frac{1}{7}(x+2) \Rightarrow x-7y-19=0,$ 10

සහ

(ii) $y+3=-7(x+2) \Rightarrow 7x+y+17=0.$ 10

$\boxed{45}$

---

$l_1$ යනු $x-7y-19=0$ රේඛාව සහ අනෙක $l_2$ යැයි ගනිමු.

$PQ$ හි සමීකරණය: $y-1=-\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 3x+4y-7=0$ 10

$l_1$ සහ $PQ$ හි ඡේදන ලක්ෂය: $P=(5,-2)$ 5

$Q=(x_0,y_0)$ නම්,

$$\frac{5+x_0}{2}=1 \Rightarrow x_0=-3 \quad 5$$

$$\frac{-2+y_0}{2}=1 \Rightarrow y_0=4$$

$$Q \equiv (-3,4). \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

$A, P, B$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය $AB$ විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය වේ. 10

$(y-5)(y+3)+(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-23=0$ 10

$\boxed{20}$

---

$CR^2=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2$ හා වෘත්තයේ අරය 5 වේ. 10

දැන් $CR^2-25=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2-25$ 5

$=41\lambda^2-18\lambda-23$

$=(\lambda-1)(41\lambda+23)>0$ as $\lambda>1.$ 10

$\therefore R$ ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි. 5

$\boxed{30}$

---

අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$$x(4\lambda) + y(5\lambda) - (x + 4\lambda) - (y + 5\lambda) - 23 = 0$$ 10

$$(-x - y - 23) + \lambda(4x + 5y - 9) = 0$$ 5

$\therefore$ ස්පර්ශ ජ්‍යාය $4x + 5y - 9 = 0$ හා $x + y + 23 = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි.

එය අචල ලක්ෂයකි. 5 10

30

**17.** (*a*) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ විසඳන්න.

$\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දැක්වා, $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $t = \cos\theta$ වේ.

ඒ නයින්, $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2 - 2t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) $ABC$ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද $D$ යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි $BC$ මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු; මෙහි $m, n > 0$ වේ. $B\hat{A}D = \alpha$ හා $D\hat{A}C = \beta$ බව දී ඇත. $BAD$ හා $DAC$ ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $b = AC$ හා $c = AB$ වේ.

ඒ නයින්, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

5 5

(a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$

$$3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta),\ n \in \mathbb{Z}. \quad 5$$

$$5\theta = 2n\pi + \pi,\ n \in \mathbb{Z} \text{ or } \theta = 2n\pi - \pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$0 \le \theta \le \pi$ බැවින් විසඳුම් $\theta = \pi,\ \frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ $\boxed{30}$

5 5 5

---

5 5

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ and $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

$$\therefore \cos 2\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1$$

$$= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1, \text{ මෙහි } t = \cos\theta.$$

10 $\boxed{20}$

---

$\therefore\ 4t^3+2t^2-3t-1=0$ හි මූලයන් $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ 10

$\cos\pi=-1 \implies t+1$ යනු $4t^3+2t^2-3t-1$ හි සාධකයකි.

$\implies 4t^3+2t^2-3t-1=(t+1)(4t^2-2t-1)=0$ 10

$\implies 4t^2-2t-1=0$ හි මූලයන් $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$. 5

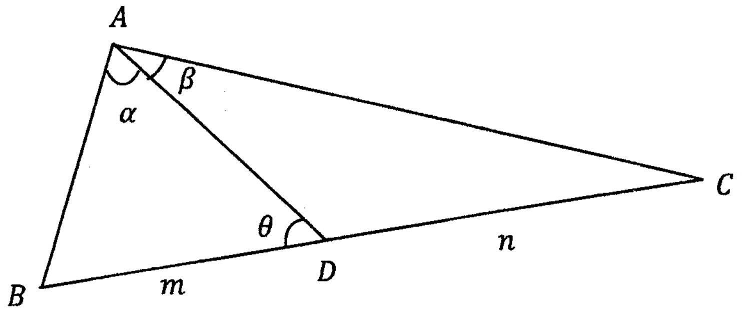
$t=\frac{2\pm\sqrt{2^2+4\times4\times1}}{2\times4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ 5

$\cos\frac{3\pi}{5}<0$ බැවින් $\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. 5

35

---

(b)




$B\hat{D}A=\theta$ යැයි ගනිමු.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන්:

$BAD\ \Delta:\ \frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\theta}$ 10

$ADC\ \Delta:\ \frac{DC}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin(\pi-\theta)}$ 10

$\implies \frac{(BD)\sin\beta}{(DC)\sin\alpha}=\frac{c}{b}$

$\implies \frac{mb}{nc}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. 5

25

---

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb-nc}{mb+nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc} \quad 5$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad 5 \quad 5$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

5

$\boxed{20}$

---

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ හා $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta$ යැයි ගනිමු. $0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

5 $\quad 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$

$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ ($\frac{\pi}{2} - \delta$ සුළු කෝණයක් බැවින්, $2\gamma$ ද සුළු කෝණයකි.)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \quad 5$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4} \quad 5$$

$$\therefore 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}.. \quad 5$$

$\boxed{20}$

---