අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2019

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

(පැරණි නිර්දේශය)

ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස : 10 × 25 = 250

B කොටස : 05 × 150 = 750

එකතුව = 1000 / 10

I පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න. ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමග □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) ....
....
.... √ △ $\frac{4}{5}$

(ii) ....
....
.... √ △ $\frac{3}{5}$

(iii) ....
....
.... √ △ $\frac{3}{5}$

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, L.H.S. $= 2 \times 1 - 1 = 1$ හා R.H.S. $= 1^2 = 1$. (5)

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n = 1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන ප්‍රතිඵලය $n = p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

එනම් $\sum_{r=1}^{p}(2r-1) = p^2$. (5)

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1}(2r-1) = \sum_{r=1}^{p}(2r-1) + \big(2(p+1)-1\big)$ (5)

$= p^2 + (2p+1)$

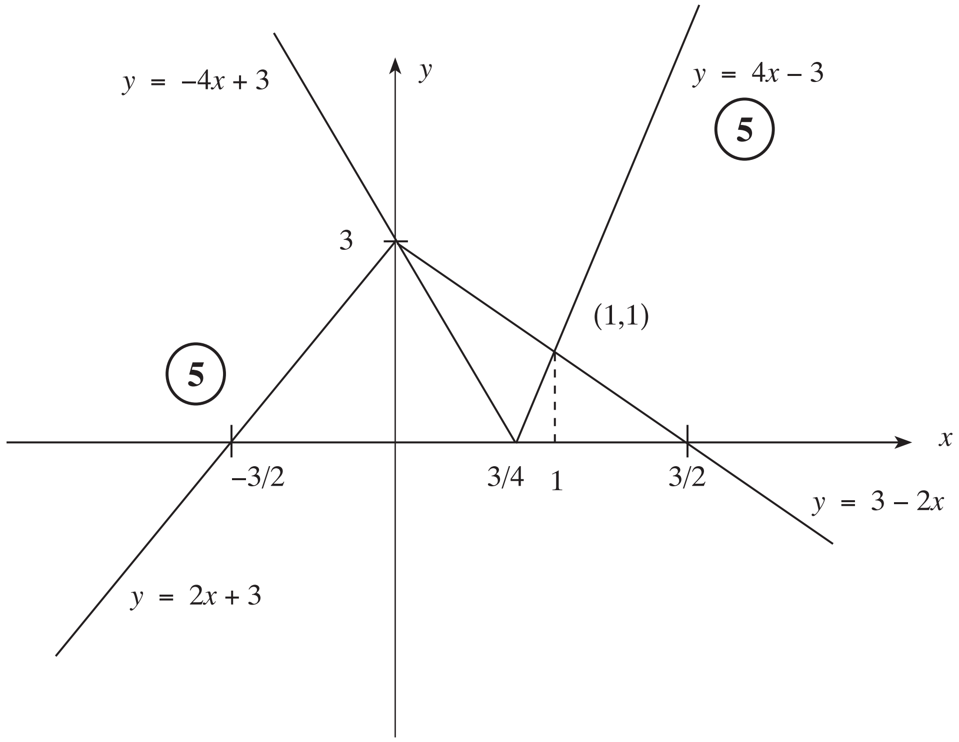
$= (p+1)^2$. (5)

ඒ නයින්, $n = p$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත. එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලුම $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

2. එක ම රූප සටහනක $y=|4x-3|$ හා $y=3-2|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|2x-3|+|x|<3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



මෙම ප්‍රස්තාරයෙන්හි ඡේදන ලක්ෂවලදී

$$4x - 3 = 3 - 2x \Rightarrow x = 1 \quad (5)$$

$$-4x + 3 = 3 + 2x \Rightarrow x = 0$$

ප්‍රස්තාර මගින්,

$|4x-3| < 3-2|x| \Leftrightarrow 0 < x < 1$ වේ.

$\therefore\ |4x-3| + |2x| < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

x යන්න $\frac{x}{2}$, මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්,

$|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$ (5)

$\therefore\ |2x-3| + |x| < 3$ අසමානතාවය තෘප්ත කරන සියලු x අගයන්ගේ කුලකය

$\{x : 0 < x < 2\}$ වේ. (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5).

x හි අගයන් සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්

$|2x-3| + |x| < 3$

(i) අවස්ථාව $x \leq 0$:

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x+3-x < 3$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොපවතී.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \leq \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x+3+x < 3$

$\Leftrightarrow x > 0$

එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x \leq \frac{3}{2}$ වේ.

(iii) අවස්ථාව $x > \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 2x-3+x < 3$

$\Leftrightarrow 3x < 6$

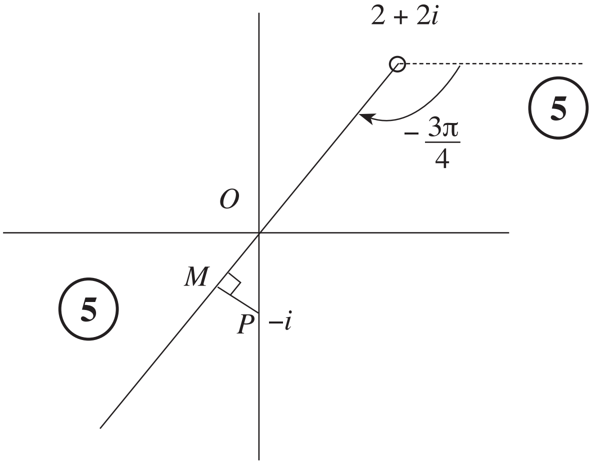
$\Leftrightarrow x < 2$

එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $\frac{3}{2} < x < 2$ වේ.

අවස්ථා 3 ම නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	(10)
ඕනෑම අවස්ථා 2 ක් නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	(5)

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x < 2$ වේ. (5) **25**

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z-2-2i)=-\dfrac{3\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(z-2-2i)=-\dfrac{3\pi}{4}$ වන පරිදි $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය සොයන්න.



$|i\bar{z}+1| = |i(\bar{z}-i)| = |\bar{z}-i| = |\overline{z+i}|$

$= |z+i|$

$= |z-(-i)|$ (5)

ඒ නයින්, $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය PM වේ. (5)

දැන්, $PM = 1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (5)

25

4. $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^7$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^6 හි සංගුණකය 35 බව පෙන්වන්න.

ඉහත ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදයක් **නොපවතින** බවත් පෙන්වන්න.

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\,(x^3)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r}$$ (5)

$$= \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\,x^{5r-14}$$

x^6 : $5r-14 = 6 \Leftrightarrow r = 4.$ (5)

$\therefore x^6$ හි සංගුණකය $= {}^7C_4 = 35$ (5)

ඉහත ප්‍රසාරණයට x, වලින් ස්වායත්ත පදයක් තිබීම සඳහා $5r-14 = 0$ විය යුතුය. (5)

$r \in \mathbb{Z}^+$ බැවින් මෙය සිදුවිය නොහැක. (5)

25

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \dfrac{1}{2\pi}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}\ -1}{\sin(\pi(x-3))} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}\ -1}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad \textcircled{5}$$

$$= \lim_{x-3\to 0} \frac{x-3}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad \textcircled{5}$$

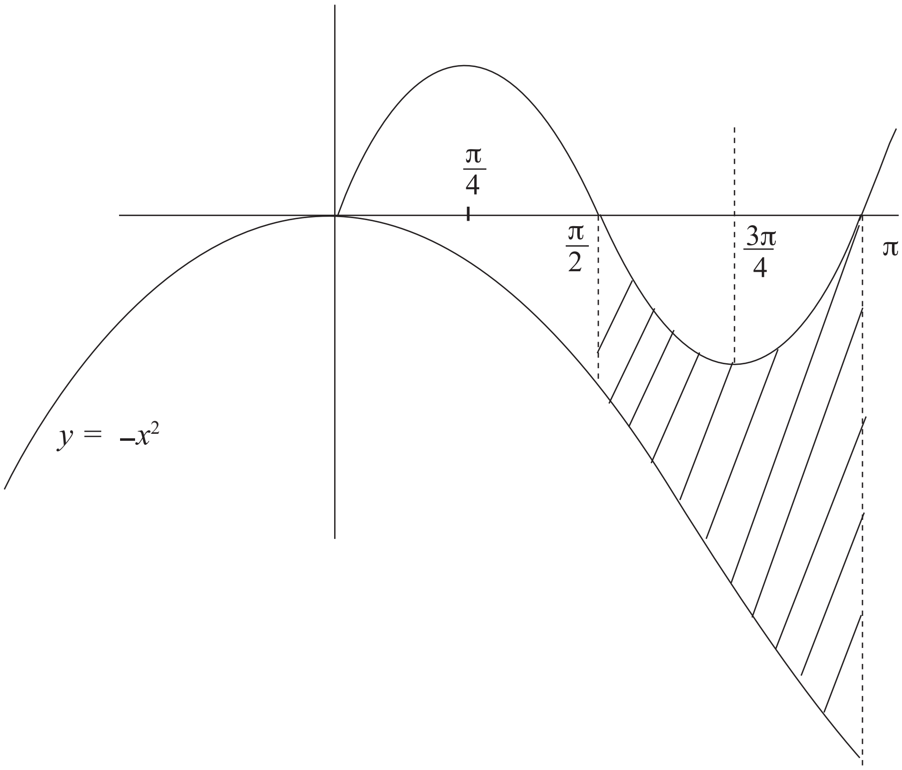
$$= \lim_{x-3\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi(x-3))}{\pi(x-3)}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad \textcircled{5}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}$$
(5)

$$= \frac{1}{2\pi} \quad \textcircled{5}$$

25

6. $y=\sin 2x,\ y=-x^2,\ x=\frac{\pi}{2}$ හා $x=\pi$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $\left(\frac{7}{24}\pi^3-1\right)$ බව පෙන්වන්න.



අවශ්‍ය වර්ගඵලය

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[(\sin 2x) - (-x)^2 \right] dx \quad (10)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \quad (5)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\pi^3 \right) - \left[+\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \right] \quad (5)$$

$$= \frac{7\pi^3}{24} - 1. \quad (5)$$

25

7. $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = e^t(1+t^2)$ හා $y = e^t(1-t^2)$ මගින් C වක්‍රයක් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ.

$t \neq -1$ සඳහා $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(t^2+2t-1)}{(t+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

C වක්‍රයට, එය මත $P \equiv (1,1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ ස්පර්ශ රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$x = e^t(1+t^2)$, $y = e^t(1-t^2)$, $t \in \mathbb{R}$

$\dfrac{dx}{dt} = e^t(2t+1+t^2)$, (5) $\dfrac{dy}{dt} = e^t(-2t+1-t^2)$ (5)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{(-t^2+2t-1)}{(t+1)^2}$$; $t \neq -1$ සඳහා

(5)

$P\ (1\ ,\ 1)$, ලක්ෂ්‍යයේදී $t = 0$ හා $\dfrac{dy}{dx} = 1$ වේ.

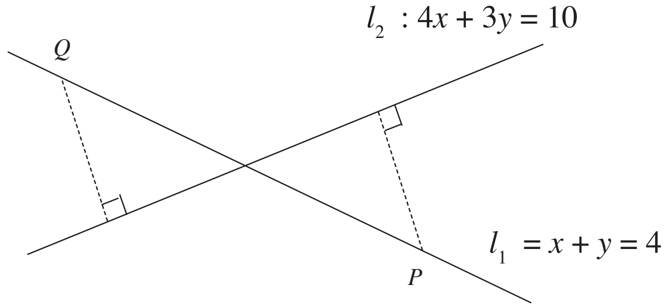
(5)

P හිදී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $y - 1 = 1\,(x-1)$ වේ. (5)

එනම් $y = x$ වේ.

25

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $x + y = 4$ හා $4x + 3y = 10$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක l_1 රේඛාව මත පිහිටා ඇත්තේ මෙම එක් එක් ලක්ෂ්‍යයේ සිට l_2 රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක 1 ක් වන පරිදි ය. P හි හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



l_1 මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්

$(t, 4 - t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැක; මෙහි $t \in \mathbb{R}$. (5)

$P \equiv (t_1, 4 - t_1)$ යැයි ගනිමු.

P සිට l_2 ට ලම්බ දුර $= \dfrac{\left|4t_1 + 3(4 - t_1) - 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$ (5)

$\therefore \ |t_1 + 2| = 5$

$\therefore \ t_1 = -7$ හෝ $t_1 = 3$ (5)

P හා Q හි ඛණ්ඩාංක

$(-7, 11)$ හා $(3, 1)$ වේ. (5) + (5)

25

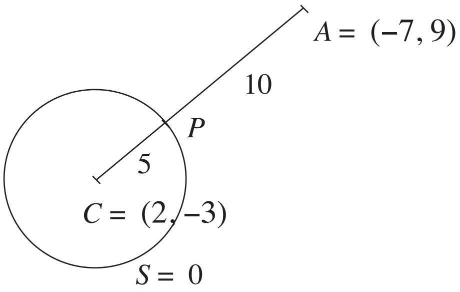
9. $A \equiv (-7, 9)$ **ලක්ෂ්‍යය** $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ **වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.**
$S = 0$ **වෘත්තය මත වූ,** A **ලක්ෂ්‍යයට ආසන්නතම ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.**

$S = 0$ හි කේන්ද්‍රය C කේන්ද්‍රය $(2, -3)$ වේ. (5)

$S = 0$ හි R අගය $\sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} =$ වේ. (5)

$CA^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow CA = 15 > R = 5.$ (5)

$\therefore$ A ලක්ෂ්‍යය දී ඇති වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටයි.



$S = 0$ වෘත්තයට ආසන්නතම A ලක්ෂ්‍යය

CA ට $S = 0$ හමුවන P ලක්ෂ්‍ය වේ.

$CP : PA = 5 : 10$

$= 1 : 2$ (5)

$$\therefore \quad P \equiv \left(\frac{2 \times 2 + 1\,(-7)}{3}\ ,\ \frac{2\,(-3) + 1 \times 9}{3} \right)$$

එනම් $P \equiv (-1,\ 1)$ (5)

25

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ සඳහා $t = \tan\frac{\theta}{2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ. $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} \quad (5) \quad ;\ \theta \neq (2n+1)\pi \text{ සඳහා}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු. එවිට $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(5)

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,(1+t^2) = 2\,(1-t^2)$$

$$(2+\sqrt{3})\,t^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore t^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \quad (5)$$

$$= (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3} \quad (5) \qquad \left(\because \tan\frac{\pi}{12} > 0\right)$$

25

11. (*a*) $p \in \mathbb{R}$ හා $0 < p \leq 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 + 2x + p = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු මෙම සමීකරණයෙහි මූල යැයි ගනිමු. α හා β දෙකම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.
p ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා

$$\frac{1}{(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{(\beta - 1)} = \frac{p^2}{p^2 + p + 2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ හා $\dfrac{\beta}{\beta - 1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $(p^2 + p + 2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ මගින් දෙනු ලබන බවත්, මෙම මූල දෙකම ධන වන බවත් පෙන්වන්න.

(*b*) c හා d යනු **නිශ්ශූන්‍ය** තාත්ත්වික සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ද $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ යැයි ද ගනිමු. $(x - c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බවත්, $(x - d)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය cd බවත් දී ඇත. c හා d හි අගයන් සොයන්න. c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා, $(x + 2)^2$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(*a*) $p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් යැයි සිතමු.

$x = 1$, $p^2 + 2 + p = 0$ ලැබේ. (5)

නමුත් $p > 0 \Rightarrow p^2 + 2 + p > 0$, බැවින් මෙය සිදු විය නොහැක. (5)

$\therefore$ $p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් නොවේ. **[10]**

විවේචකය $\Delta = 2^2 - 4p^2 \cdot p$ (10)

$= 4(1 - p^3)$

$\geq 0 \quad (\because 0 < p \leq 1)$ (5)

$\therefore$ α හා β දෙකම තාත්ත්වික වේ. (5) **[20]**

$\alpha + \beta = -\dfrac{2}{p^2}$ හා $\alpha\beta = \dfrac{1}{p}$ (5) + (5)

දැන්,

$$\frac{1}{(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{(\beta - 1)} = \frac{1}{(\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1)} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + 1}$$

$$= \frac{p^2}{p^2 + p + 2}. \quad (5)$$

[20]

දැන්

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}+\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)\ (\beta-1)}$$

$$=\frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{(\alpha-1)\ (\beta-1)} \quad (5)$$

$$=\left(\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2}\right)\cdot\ \frac{p^2}{p^2+p+2} \quad (5)$$

$$=\frac{2(p+1)}{p^2}\cdot\ \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$=\frac{2(p+1)}{p^2+p+2} \quad (5)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)\ (\beta-1)}$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$=\frac{p}{p^2+p+2}\ . \quad (5)$$

ඒ නයින් අවශ්‍ය වර්ගජ සමීකරණය

$$x^2-\frac{2(p+1)}{p^2+p+2}\,x+\frac{p}{p^2+p+2}=0$$ වේ. (10)

$$\Rightarrow\quad (p^2+p+2)\,x^2-2\,(p+1)\,x+p=0 \quad (5)$$

35

$\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$ හා $\frac{\beta}{(\beta-1)}$ යන දෙකම තාත්ත්වික වේ.

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)}+\frac{\beta}{(\beta-1)}=\frac{2(p+1)}{p^2+p+2}>0,\ (\because\ p>0),$$ (5)

සහ $$\frac{\alpha}{(\alpha-1)}\cdot\frac{\beta}{(\beta-1)}=\frac{p}{p^2+p+2}>0,\ (\because\ p>0)\ .$$

ඒ නයින් මෙම මූල දෙකම ධන වේ. (5)

10

(b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$

$(x-c)$ සාධකයක් බැවින් $f(c) = 0$ වේ. (5)

$\Rightarrow c^3 + 2c^2 - dc + cd = 0$ (5)

$\Rightarrow c^2 (c+2) = 0$

$\Rightarrow c = -2 \quad (\because c \neq 0)$ (5)

$f(x)$ යන්න $(x - d)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය cd බැවින්

$f(d) = cd.$ (5)

$\Rightarrow d^3 + 2d^2 - d^2 + cd = cd$ (5)

$\Rightarrow d^3 + d^2 = 0$

$\Rightarrow d^2 (d+1) = 0$

$\Rightarrow d = -1 \quad (\because d \neq 0)$ (5)

$\therefore \quad c = -2$ හා $d = -1.$ **30**

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2.$

$f(x)$ යන්න $(x+2)^2$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $Ax + B$ යැයි ගනිමු.

එවිට $f(x) \equiv (x+2)^2\, Q(x) + (Ax+B)$; මෙහි $Q(x)$ මාත්‍රය 1 වූ බහු පදයකි.

එබැවින්, $x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x+2)^2\, Q(x) + Ax + B$ වේ. (5)

$x = -2,$ ආදේශයෙන් $0 = -2A + B$ ලැබේ. (5)

අවකලනය කිරීමෙන්

$$3x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2\, Q'(x) + 2Q(x)(x+2) + A \text{ වේ.}$$ (5)

නැවත $x = -2$ ආදේශයෙන්

$12 - 8 + 1 = A$ ලැබේ. (5)

$\therefore \quad A = 5$ හා $B = 10$

ඒ නයින්, ශේෂය $5x + 10.$ (5) **25**

වෙනත් ක්‍රමයක්

දීර්ඝ බෙදීම මගින්

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2 + 4x} \\
 & \quad -2x^2 - 3x + 2 \\
 & \quad \underline{-2x^2 - 8x - 8} \\
 & \qquad\qquad 5x + 10.
\end{array}
$$

(15)

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x^2 + 4x + 4)(x - 2) + (5x + 10)$$

$\therefore$ අවශ්‍ය ශේෂය $5x + 10$ වේ. (10)

25

12. (*a*) P_1 හා P_2 යනු පිළිවෙළින් $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ මගින් දෙනු ලබන කුලක දෙක යැයි ගනිමු. $P_1 \cup P_2$ න් ගනු ලබන වෙනස් අකුරු 3 කින් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 කින් යුත්, අවයව 6 කින් සමන්විත මුරපදයක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත. පහත එක් එක් අවස්ථාවේ දී සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් මුරපද ගණන සොයන්න:

(i) අවයව 6 ම P_1 න් පමණක් ම තෝරා ගනු ලැබේ,

(ii) අවයව 3 ක් P_1 න් ද P_2 න් අනෙක් අවයව 3 ද තෝරා ගනු ලැබේ.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ යැයි ගනිමු.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(***a***) $P_1 = \{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $P_2 = \{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$

(i) P_1 න් පමණක්ම වෙනස් අක්ෂර 3 ක් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් අක්ෂර ගණන $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3$ (10)

ඒ නයින්, අවයව 6 ම P_1 ගෙන සෑදිය හැකි මුර පද ගණන $= {}^5C_3 \,.\, {}^4C_3 \,.\, 6\,!$ (5)

$= 28800$ (5)

20

(ii)

තෝරිය හැකි වෙනස් ආකාර				මුර පද ගණන	
P_1 න්		P_2 න්			
අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක	අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක		
3	–	–	3	${}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6\,! = 28800$	(10)
2	1	1	2	${}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot 6\,! = 864000$	(10)
1	2	2	1	${}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot 6\,! = 864000$	(10)
–	3	3	–	${}^4C_3 \cdot {}^5C_3 \cdot 6\,! = 28800$	(10)

ඒ නයින්, අවයව 3 ක් P_1 න් ද, අනෙක් අවයව 3 ක් P_2 න් ද තෝරාගෙන සෑදිය හැකි

වෙනස් මුර පද ගණන $= 28800 + 864000 + 864000 + 28800 = 1785600$

(10)

50

(b) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)\,(r+3)\,(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)\,(r+2)}$; $r \in \mathbb{Z}^+$.

එවිට,

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)\,(r+2)} - \frac{1}{(r+2)\,(r+3)\,(r+4)}$$ (5)

$$= \frac{(r+3)\,(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)\,(r+2)\,(r+3)\,(r+4)}$$

$$= \frac{6\,(r+2)}{r(r+1)\,(r+2)\,(r+3)\,(r+4)}$$ (5)

$$= 6\,U_r$$ (5)

15

එවිට,

$r = 1;\quad 6\,U_1 = V_1 - V_3,$

$r = 2;\quad 6\,U_2 = V_2 - V_4,$

$r = 3;\quad 6\,U_3 = V_3 - V_5,$

$r = 4;\quad 6\,U_4 = V_4 - V_6,$

(10)

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$r = n-3;\quad 6\,U_{n-3} = V_{n-3} - V_{n-1}$

$r = n-2;\quad 6\,U_{n-2} = V_{n-2} - V_n$

$r = n-1;\quad 6\,U_{n-1} = V_{n-1} - V_{n+1}$

$r = n;\quad 6\,U_n = V_n - V_{n+2}$

(10)

$$\therefore \quad 6\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (5)$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{2n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (5)$$

40

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{2r-1} + U_{2r})$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r \quad (5)$$

$$= \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \quad (5)$$

10

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}\right) \quad (5)$$

$$= \frac{5}{144} - \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{5}{144} \quad (5)$$

$\therefore \quad \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $\frac{5}{144}$ වේ. (5)

15

13.(*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ යනු $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ වන පරිදි වූ න්‍යාස යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$a = 2$ හා $b = 1$ බව පෙන්වන්න.

තව ද $\mathbf{C}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, $2\mathbf{P}(\mathbf{Q} + 3\mathbf{I}) = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\operatorname{Re} z \leq |z|$, හා

(ii) $z_2 \neq 0$ සඳහා $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

බව පෙන්වන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \leq \dfrac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\dfrac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$ බව සත්‍යාපනය කර,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) ආගන්ඩ් සටහනක, O යනු මූලය ද $OACB$ යනු ශීර්ෂ වාමාවර්තව ගනු ලැබූ චතුරස්‍රයක් ද වේ.

A ලක්ෂ්‍යය $2 + 4\sqrt{3}\,i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන අතර $A\hat{O}C = \frac{\pi}{3}$ හා $O\hat{A}C = \frac{\pi}{2}$, $OA = OB$ හා $CA = CB$ වේ. B හා C ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(***a***) $AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

(5) (10)

$AB^T = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2a - 3 = b, \quad a - 4 = -2$ හා $a = b + 1.$ (10)

$\Leftrightarrow a = 2,\ b = 1,$ (ඕනෑම ඉහත සමීකරණ දෙකකින්) මෙම අගයන් අනෙක් සමීකරණය ද තෘප්ත කරයි. (5)

30

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (5)

$\therefore$ C^{-1} නොවතී. (5)

10

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

C^{-1} පැවතීම සඳහා :

$p, q, r, s \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5)

$\Rightarrow p - 2r = 1,\ -p + 2r = 0,\ q - 2s = 0$ හා $-q + 2s = 1$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ C^{-1} නොපවතී. (5)

10

$P = \dfrac{1}{2}(C - 2I) = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (5)

$\Rightarrow P^{-1} = 2\left(\dfrac{1}{-2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (10)

$2P(Q + 3I) = P - I$

$\Leftrightarrow \quad 2(Q + 3I) = I - P^{-1}$ (5)

$\therefore \quad 2(Q + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5)

$\Rightarrow Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3I$

$= \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$ (5)

30

(b) $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

(i) $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$\text{Re}\, z = x \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (5)

(ii) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ හා $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ යැයි ගනිමු.

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\ \frac{\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{1}$$ (10)

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$ (5)

20

$z_1 + z_2 \ne 0$ සඳහා $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \le \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$

(5) (i) මගින් (5) (ii) මගින්

10

$z_1 + z_2 \ne 0$ සඳහා

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} = 1$$ (5)

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$ (5)

10

$$\Rightarrow \quad 1 = \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| \quad \text{(i) (5) මගින්}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad \text{(ii) මගින්}$$

$$= \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad (5)$$

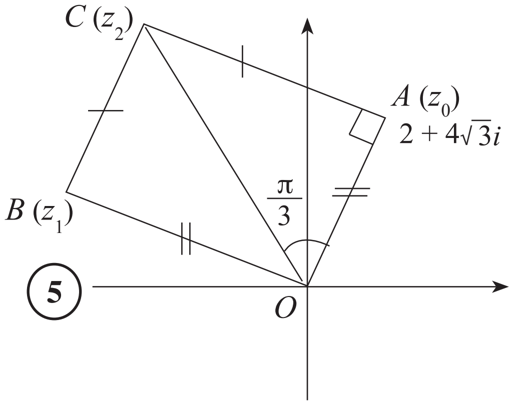
$$\Rightarrow \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (\because |z_1 + z_2| > 0)$$

දැන් $z_1 + z_2 = 0$ එවිට

$$|z_1 + z_2| = 0 \leq |z_1| + |z_2|$$

ඒ නයින්, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **10**

(c)



A, B හා C ශීර්ෂ නිරූපණය කරන සමීකරණය සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු. z_0, z_1 හා z_3.

එවිට $|z_1| = OB = OA = |z_0|$, හා $A\hat{O}B = 2.\frac{\pi}{3}$ ද $\Delta\, OAC \equiv \Delta\, OBC$ ද වේ. (5)

$$\therefore \quad z_1 = z_0 (\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}) \quad (5)$$

$$= (2 + 4\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -7 - i\sqrt{3} \quad (5)$$

තවද $OC = 2\,(OA) = 2|z_0|$.

$$\therefore z_2 = 2\,z_0 (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \quad (5)$$

$$= 2(2 + 4\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -10 + 6\sqrt{3}i \quad (5)$$

30

---

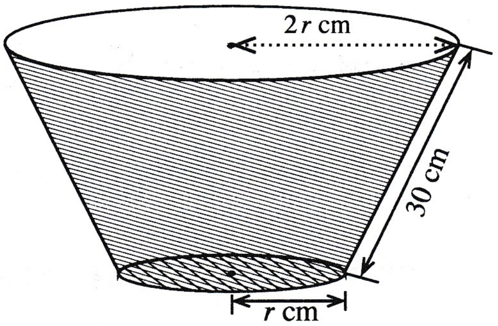
14. (*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{4(x^2-1)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(3x-2)}{2(x^2-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, y – අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $\dfrac{1}{f(x)} \leq 1$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් පතුලක් සහිත ඍජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක ආකාරයෙන් වූ බේසමක් පෙන්වයි. බේසමෙහි ඇල දිග 30 cm ක් ද උඩත් වෘත්තාකාර දාරයෙහි අරය පතුලෙහි අරය මෙන් දෙගුණයක් ද වේ. පතුලේ අරය r cm යැයි ගනිමු.



බේසමේ පරිමාව V cm^3 යන්න $0 < r < 30$ සඳහා

$V = \dfrac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

බේසමේ පරිමාව උපරිම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

(***a***) $x \neq \pm\ 1$ සඳහා ; $f(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{4(x^2-1)}$

එවිට $x \neq \pm\ 1$ සඳහා

$$f'(x) = \frac{4(2x-3)(x^2-1) - (2x-3)^2 \cdot 2x}{4(x^2-1)^2} \quad \textcircled{10}$$

$$= \frac{(2x-3)(3x-2)}{2(x^2-1)^2} \quad \textcircled{5}$$

15

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = \pm\ 1$. (5)

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $y = 1$.

$x \to \pm\infty$, $f(x) \to 1$. (5)

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

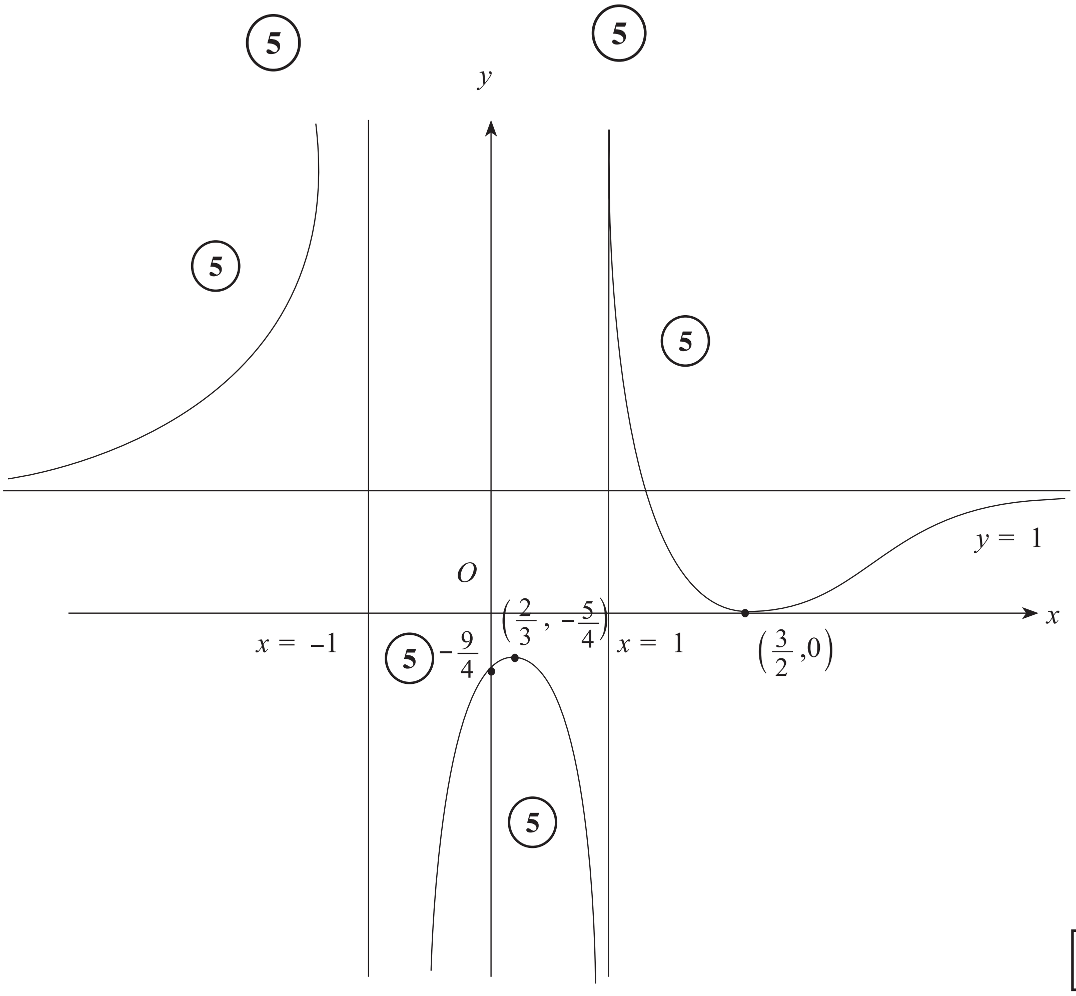
$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = +\infty$ හා $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -\infty$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යවලදී $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ හෝ $x = \dfrac{2}{3}$. (5)

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 1$	$1 < x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(+)	(–)	(–)	(+)
	f වැඩිවේ	f වැඩිවේ	f අඩුවේ	f අඩුවේ	f වැඩිවේ

(5) (5) (5) (5) (5)

$\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයකි. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ස්ථානීය අවමයකි.



70

$$f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2}{4(x^2-1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 - 4 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{12}. \quad (5)$$

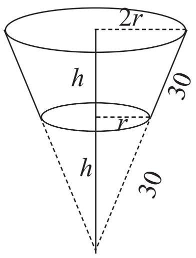
$$\frac{1}{f(x)} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 1 \text{ හෝ } f(x) < 0$$

$\therefore$ අවශ්‍ය x හි අගයන් $1 < x < \frac{13}{12}$ හෝ $-1 < x < 1$ හෝ $-\infty < x < -1$

(5) (5)

20

(b)



$0 < r < 30$ සඳහා ;

$h = \sqrt{900 - r^2}$ (5)

පරිමාව V යන්න

$V = \frac{1}{3}\pi (2r)^2 \times 2h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$ මගින් දෙනු ලැබේ. (5)

$= \frac{7}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$. (5)

15

$0 < r < 30$ සඳහා

$$\frac{dV}{dr} = \frac{7}{3}\pi\left[2r\sqrt{900 - r^2} + r^2 \frac{(-2r)}{2\sqrt{900 - r^2}}\right]$$ (5)

$$= \frac{7}{3}\pi\left[\frac{2r(900 - r^2) - r^3}{\sqrt{900 - r^2}}\right]$$

$$= 7\pi r \frac{(600 - r^2)}{\sqrt{900 - r^2}} .$$ (5)

$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 10\sqrt{6} \quad (\because r > 0)$ (5)

$0 < r < 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} > 0$ හා $r > 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} < 0$

(5) (5)

$r = 10\sqrt{6}$ විට V අවම වේ. (5)

30

---

15. (*a*) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 2\sin^2\theta + 3$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx$ අගයන්න.

(*b*) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ සොයන්න.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ යැයි ගනිමු.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int \ln(x-k)\,dx$ සොයන්න; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\int f(t)\,dt$ සොයන්න.

(*c*) a හා b නියත වන $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ හි අගය සොයන්න.

(*a*) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ සඳහා :

$x = 2\sin^2\theta + 3 \Rightarrow dx = 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$x = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ (5)

$x = 4 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ (5)

එවිට $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2-2\sin^2\theta}} \cdot 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\ d\theta$ (5)

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\ d\theta$ (5)

$= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ (5)

$= \frac{\pi}{2} - 1$ (5)

40

(b) $x \neq 1, 2$ සඳහා

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

x හි බලවල සංගුණක සැපයීමෙන් :

x^1 : $A + B = 0$ (5)

x^0 : $-2A - B = 1$ (5)

$A = -1$ හා $B = 1$ (5)

එවිට $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)}\,dx$ (10)

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(5) (5) (5)

40

$$f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$$

$$= \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^t \quad (5)$$

$$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2 \text{ for } t > 2. \quad (5)$$

10

$$\int \ln(x-k)\,dx = x\ln(x-k) - \int \frac{x}{(x-k)}\,dx \quad (5)$$

$$= x\ln(x-k) - \int 1\,dx - \int \frac{k}{(x-k)}\,dx \quad (5)$$

$$= x\ln(x-k) - x - k\ln(x-k) + C \quad (5)$$

$= (x-k)\ln(x-k) - x + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

15

$$\int f(t)\,dt = \int \ln(t-2)\,dt - \int \ln(t-1)\,dt + \int \ln 2\,dt \quad (5)$$

$$= (t-2)\ln(t-2) - t - \Big[(t-1)\ln(t-1) - t\Big] + t\ln 2 + D$$

$= (t-2)\ln(t-2) - (t-1)\ln(t-1) + t\ln 2 + D$, මෙහි D යනු අභිමත නියතයකි.

(5)

10

(c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^{-x}}\,dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad (5)$$

10

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^x)\cos^2 x}{(1+e^x)}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} \quad (5)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

25

---

16. $12x-5y-7=0$ හා $y=1$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

l යනු මෙම රේඛාවලින් සෑදෙන සුළු කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය යැයි ගනිමු. l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

P යනු l මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. P හි ඛණ්ඩාංක $(3\lambda+1, 2\lambda+1)$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

$B \equiv (6,0)$ යැයි ගනිමු. B හා P ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S+\lambda U=0$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $S \equiv x^2+y^2-7x-y+6$ හා $U \equiv -3x-2y+18$ වේ.

$S=0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය බව **අපෝහනය** කරන්න.

$U=0$ යනු l ට ලම්බව, B හරහා යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය බව පෙන්වන්න.

සියලු $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S+\lambda U=0$ සමීකරණය සහිත වෘත්ත මත වූ ද B වලින් ප්‍රභින්න වූ ද අචල ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය, $S+\lambda U=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$12x-5y-7=0$ හා $y=1 \Rightarrow x=1, \quad y=1$

$\therefore A \equiv (1, 1)$ (10)

10

සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{12x-5y-7}{13} = \pm \frac{(y-1)}{1}$$ (10)

$\Rightarrow 12x-5y-7 = 13(y-1)$ or $12x-5y-7 = -13(y-1)$

$\Rightarrow 2x-3y+1 = 0$ or $3x+2y-5 = 0$ (5) + (5)

$y=1$ හා $2x-3y+1=0$ අතර කෝණය සුළු θ නම්

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}(0)}\right| = \frac{2}{3} < 1 \text{ වේ.}$$ (5)

$\therefore l: \; 2x-3y+1=0.$ (5)

30

---

l මත වූ (x, y) ලක්ෂ්‍යය සඳහා

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-1)}{2} = \lambda \text{ (යැයි ගනිමු.)}$$ (5)

$\Rightarrow x = 3\lambda + 1, \quad y = 2\lambda + 1.$ (5)

10

$\therefore \; P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

දැන් $B \equiv (6, 0)$ හා $P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1)$

$\therefore$ BP විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x-6)\;(x - (3\lambda+1)) + (y-0)\;(y-(2\lambda+1)) = 0$ මගින් දෙනු ලැබේ. (10)

එනම් $(x^2 + y^2 - 7x - y + 6) + \lambda\,(-3x - 2y + 18) = 0$ (5)

මෙය $S + \lambda U = 0$, ආකාරයෙන් වේ. මෙහි $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6$ හා $U \equiv -3x - 2y + 18$ වේ.

(5) (5)

25

$S = 0$ යක්ත $\lambda = 0$ ට අනුරූප වේ. $\Rightarrow P = (1, 1) \equiv A.$ (5)

$\therefore$ $S = 0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් වූ වෘත්තය වේ. (5)

l හි බෑවුම $\frac{2}{3}$ නිසා l ට ලම්බව B හරහා යන රේඛාවේ සමීකරණය $3x + 2y + \mu = 0$ වේ;

මෙහි μ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි. (10)

B ලක්ෂ්‍යය $3x + 2y + \mu = 0$ මත බැවින් $18 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -18$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $3x + 2y - 18 = 0$ වේ.

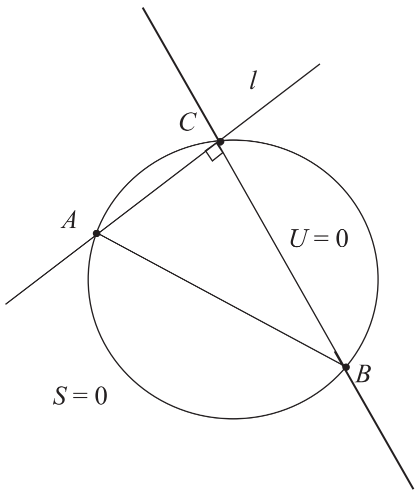
එනම් $U = -3x - 2y + 18 = 0.$

20

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S + \lambda U = 0$ යන්න $S = 0$ හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි. (10)

මෙම ලක්ෂ්‍ය වලින් එකක් B වන අතර අනෙක් C ලක්ෂ්‍යය l හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ.

(10)



$\therefore$ C හි ඛණ්ඩාංක

$$u \equiv -3x - 2y + 18 = 0$$

හා $l \equiv 2x - 3y + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 4$ හා $y = 3$

$\therefore$ $C \equiv (4, 3)$. (5)

25

$S = 0$ හා $S + \lambda U = 0$ ප්‍රලම්බ වේ.

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}(3\lambda + 7)\right)\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + 18\lambda + 6$$

(5) (5) (5)

$\Leftrightarrow$ $13\lambda = 26$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 2.$

(5)

20

---

17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B) \text{ හා}$$
$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ විසඳන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක $BD = DC$ හා $AD = BC$ වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යය AC මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{C}B = \beta$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+2\beta)$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ නම්, ඉහත (*a*) හි අවසාන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න. **ඒ නයින්,** $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ——— (1) **(5)**

දැන් $\sin(A-B) = \sin(A+(-B))$ **(5)**

$= \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$

$\therefore\ \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ——— (2) **(5)** **[15]**

---

(1) + (2) $\Rightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B,$ **(5)**

(1) − (2) $\Rightarrow \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$ **(5)** **[10]**

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$

$2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta,$

$\Leftrightarrow \sin 5\theta + \sin\theta = \sin 7\theta$ **(5)**

$\Leftrightarrow \sin 7\theta - \sin 5\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin(6\theta+\theta) - \sin(6\theta-\theta) - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 6\theta\sin\theta - \sin\theta = 0$ **(5)**

$\Leftrightarrow \sin\theta(2\cos 6\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6\theta = \frac{1}{2}$ since $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \sin\theta > 0$

(5)

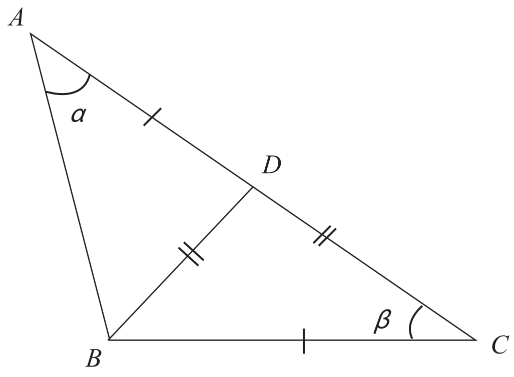
$\Rightarrow \; 6\theta = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$ (5) + (5)

$\Rightarrow \; \theta = \dfrac{n\pi}{3} \pm \dfrac{\pi}{18} \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$

$\Rightarrow \; \theta = \dfrac{\pi}{18}, \dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{7\pi}{18}, \left(\because \; 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \right)$ (5)

30

(b)



$C\hat{B}D = \beta, \; A\hat{D}B = 2\beta,$

හා $A\hat{B}D = \pi - (\alpha + 2\beta)$

සයින් නීතිය යෙදීමෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{BD}{\sin B\hat{A}D} = \frac{AD}{\sin A\hat{B}D}$$ (10)

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\pi - (\alpha + 2\beta))}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\alpha + 2\beta)} \quad \text{———— (1)}$$ (5)

BDC ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{CD}{\sin D\hat{B}C} = \frac{BC}{\sin B\hat{D}C}$$ (10)

$$\Rightarrow \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin 2\beta} \quad \text{———— (2)}$$ (5)

$\because \; BD = DC$ and $AD = BC$, (1) න් හා (2) න්

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin (\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta}$$ (5)

$\Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta).$ (5)

40

$\alpha : \beta = 3 : 2$, නම්

$2\sin\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} = \sin\frac{7\alpha}{3}$ වේ. (5)

$\Rightarrow \quad 2\sin 3\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos 2\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \sin 7\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ (5)

$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}.$

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{15\pi}{18}, \frac{21\pi}{18}$ (5)

$\because BC = AD < AC$, α සුළු කෝණයක් විය යුතුය.

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}.$ (5)

20

(c) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x+1)$ යැයි ගනිමු. $x \neq \pm 1$ බව දනිමු.

එවිට $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\Leftrightarrow \quad \tan 2\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ (5)

$\Leftrightarrow \quad \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \cot\beta$ (5)

$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{x+1}$ (5)

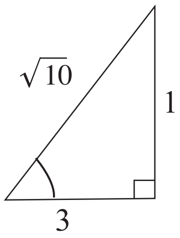
$\Leftrightarrow \quad 2x = 1 - x \quad (\because x \neq \pm 1)$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$ (5)

25

$$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$



$$\Rightarrow \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$ (5)

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$ (5)

10